

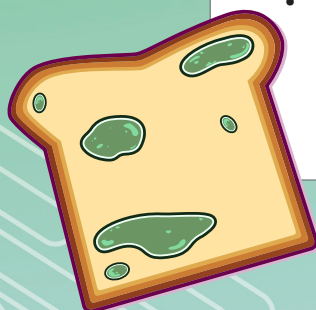
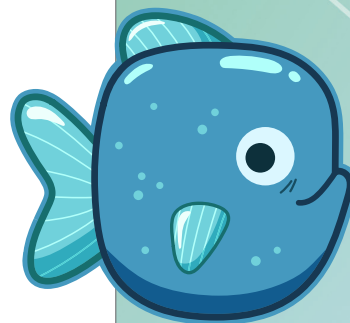
Unidad **6**

Funciones exponenciales

A veces, un pequeño cambio puede producir una gran diferencia con el paso del tiempo. En esta unidad, aprenderás sobre las relaciones que crecen rápidamente con el tiempo. Aprenderás a distinguir entre relaciones lineales y exponenciales y a plantear ecuaciones para representarlas. Modelarás situaciones que aumentan o disminuyen en un porcentaje. También modelarás datos e intereses compuestos con funciones exponenciales.

Preguntas esenciales

- ¿En qué se parecen las funciones exponenciales y lineales?
- ¿Qué tipo de función modela el aumento o la disminución porcentual repetida?
- ¿Cómo se pueden modelar situaciones de interés compuesto y crecimiento demográfico?



Las situaciones que incluyen multiplicaciones repetidas pueden modelarse mediante una ecuación en la forma $y = a \cdot b^x$. Puedes utilizar la ecuación para resolver problemas sobre la situación.

Por ejemplo, Carlos compró un nuevo pez que crece muy rápido. El pez pesaba 4 gramos cuando Carlos lo compró y su masa se hace 1.5 veces más grande cada hora.

Escribió la ecuación $m = 4 \cdot 1.5^t$ para representar la relación, donde:

- m representa la masa del pez de Carlos en gramos.
- t representa el tiempo en horas.

Puedes utilizar la ecuación para determinar la masa del pez al cabo de 4 horas introduciendo $t = 4$ y determinando el valor de m .

$$m = 4 \cdot 1.5^t$$

$$m = 4 \cdot 1.5^4$$

$$m = 4 \cdot 5.0625$$

$$m = 20.25$$

Al cabo de 4 horas, el pez tendrá una masa de 20.25 gramos.

Prueba a hacer esto

Esta es una ecuación que modela la cantidad de suscriptores al canal de Marc, donde s representa la cantidad de suscriptores y m representa el número de meses desde que Marc inició el canal.

$$s = 12 \cdot 2^m$$

- Explica qué significa 12 en esta situación.
- Explica qué significa 2 en esta situación.
- ¿Cuántos suscriptores tendrá el canal de Marc después de 8 meses?

Una **función exponencial** aumenta o disminuye con una *razón constante*. Otro nombre para la razón constante es **factor de crecimiento**.

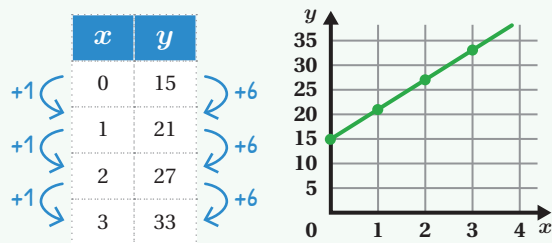
Una **función lineal** aumenta o disminuye con una *diferencia constante*. Otro nombre para la diferencia constante es *tasa de cambio*.

Aquí se muestran dos ejemplos.

Función lineal

Este patrón tiene una diferencia constante de 6, por lo que la tasa de cambio es 6.

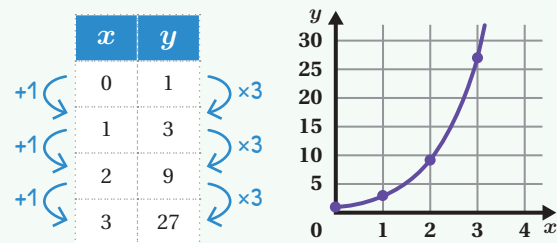
La gráfica de esta función lineal es una línea recta.



Función exponencial

Este patrón tiene una tasa constante de 3, por lo que el factor de crecimiento es 3.

La gráfica de esta función exponencial es una curva cada vez más pronunciada.



Prueba a hacer esto

Determina si cada tabla muestra una función lineal, una función exponencial o ninguna de las dos. Explica tu razonamiento. Dibuja en las tablas si te ayuda a mostrar tu razonamiento.

a

x	y
3	5
4	15
5	45

Tipo de función: _____

Explicación:

b

x	y
2	25
3	50
4	75

Tipo de función: _____

Explicación:

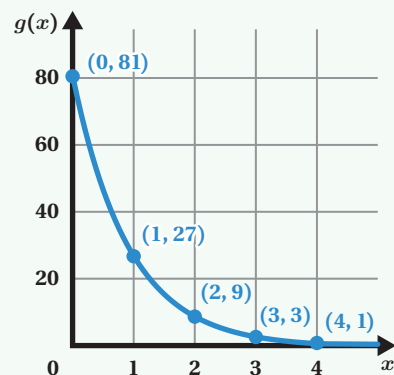
En la función exponencial $f(x) = a \cdot b^x$, a representa la *intersección con el eje y* y b representa el factor de crecimiento. Ambas partes pueden verse en una gráfica.

Veamos dos ejemplos.

Esta es la gráfica de la función exponencial

$$g(x) = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

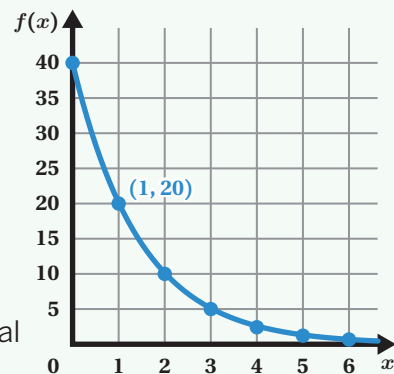
- 81 significa que $(0, 81)$ es la intersección con el eje y .
- $\frac{1}{3}$ es el factor de crecimiento. A medida que x aumenta en 1, los valores de y se multiplican por un factor de $\frac{1}{3}$.
 $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 27$.



También puedes escribir una ecuación exponencial para representar una gráfica.

- La intersección con y es $(0, 40)$, por lo que 40 es el valor a .
- Los puntos $(1, 20)$, $(2, 10)$ y $(3, 5)$ están en la gráfica de la función. Como 10 es $\frac{1}{2}$ de 20 y 5 es $\frac{1}{2}$ de 10, esta función tiene un factor de crecimiento de $\frac{1}{2}$, que es el valor b de la ecuación.

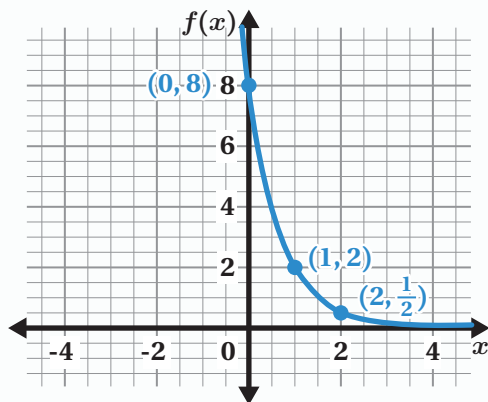
Una forma de escribir la ecuación de esta función exponencial es $f(x) = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



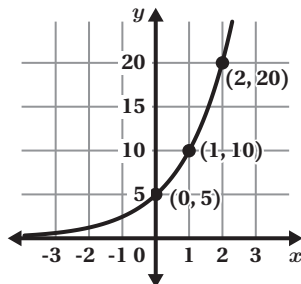
Prueba a hacer esto

Esta es la gráfica de una función exponencial.

Escribe una ecuación que pueda representar esta relación exponencial.

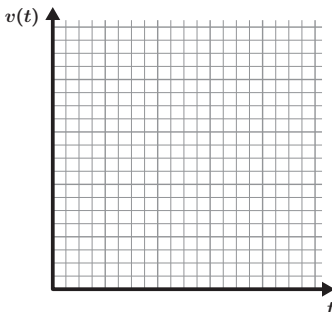


El *factor de crecimiento* es la razón constante por la que se multiplica cada término para generar una relación exponencial. Puedes identificar el factor de crecimiento de una función exponencial a partir de una situación, una ecuación, una tabla o una gráfica. Aquí hay un ejemplo.

	Función exponencial	El factor de crecimiento es 2 porque . . .								
Situación	Hay 5 mm ² de bacterias en una placa de Petri. Cada día, el número de células se duplica.	Las células se duplican cada día.								
Tabla	<table><tr><th>x</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>20</td></tr></table>	x	$g(x)$	0	5	1	10	2	20	$5 \cdot 2 = 10$ y $10 \cdot 2 = 20$.
x	$g(x)$									
0	5									
1	10									
2	20									
Gráfica		La distancia entre los puntos (0, 5) y (1, 10) se duplica en la dirección y .								
Ecuación	$g(x) = 5 \cdot (2)^x$	2 es la base del término exponencial y se eleva a la potencia de x .								

Prueba a hacer esto

Completa las partes que faltan en cada representación.

Situación	Ecuación	Tabla	Gráfica										
En 2020, un arrecife de coral tenía un volumen de 20 metros cúbicos que cambió con un factor de	$v(t) = \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$	<table><tr><th>t</th><th>$v(t)$</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	t	$v(t)$	0		1		2		3		
t	$v(t)$												
0													
1													
2													
3													

Puedes evaluar funciones exponenciales con entradas que sean positivas, negativas o cero.

Evaluemos la función $f(x) = 9 \cdot 4^x$ con $f(-3)$ usando la ecuación o una tabla.

Puedes introducir un valor en la *ecuación*.

Puedes moverte hacia atrás en una *tabla*.

Pasos	Explicación
$f(-3) = 9 \cdot 4^{(-3)}$	Introduce $x = (-3)$ en la función.
$f(-3) = 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$	Aplica la propiedad de los exponentes negativos para reescribir la expresión con un exponente positivo.
$f(-3) = 9 \cdot \left(\frac{1}{64}\right)$	Reescribe la expresión sin exponentes.
$f(-3) = \frac{9}{64}$	Multiplica para determinar el valor de $f(-3)$.

x	$f(x)$
-3	$\frac{9}{64}$
-2	$\frac{9}{16}$
-1	$\frac{9}{4}$
0	9

$\times \frac{1}{4}$
 $\times \frac{1}{4}$
 $\times \frac{1}{4}$

Multiplica 9 por $\frac{1}{4}$ tres veces para determinar el valor de $f(-3)$.

Prueba a hacer esto

Estas son dos situaciones que pueden modelarse mediante funciones exponenciales.

Situación A

La cuenta de Haru en las redes sociales tenía 18 suscriptores en 2020. La función $h(x)$ representa su número total de suscriptores x años después de 2020.

$$h(x) = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

a Determina el valor de $h(-1)$.

b Determina el valor de $k(-1)$.

c Explica si $h(-1)$ o $k(-1)$ tienen sentido en sus correspondientes situaciones.

Situación B

La taza de té verde de Kiana tiene 20 miligramos de cafeína. La función $k(x)$ representa la cantidad total de cafeína en el organismo de Kiana x horas después de terminar su té.

$$k(x) = 20 \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Una función lineal siempre aumenta (o disminuye) con diferencias iguales en *intervalos* iguales y una función exponencial aumenta (o disminuye) por *factores* iguales en intervalos iguales.

Aquí se muestran dos ejemplos.

	Función lineal $g(x) = 2x + 3$	Función exponencial $h(x) = 3^x$
Describe cómo cambia la función cuando x crece en 1	Cuando x crece en 1, $g(x)$ siempre aumentará en $2(1) = 2$: $\begin{aligned} g(x+1) - g(x) &= (2(x+1) + 3) - (2x + 3) \\ &= (2x + 2 + 3) - (2x + 3) \\ &= 2x + 5 - 2x - 3 \\ &= 5 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$	Cuando x crece en 1, $h(x)$ siempre se multiplicará por un factor de $3^1 = 3$. $\begin{aligned} \frac{h(x+1)}{h(x)} &= \frac{3^{(x+1)}}{3^x} \\ &= \frac{3^x \cdot 3^1}{3^x} \\ &= 3 \end{aligned}$
Describe cómo cambia la función cuando x crece de a 4	Cuando x crece de a 4, $g(x)$ siempre aumentará en $2(4) = 8$. $\begin{aligned} g(x+4) - g(x) &= (2(x+4) + 3) - (2x + 3) \\ &= (2x + 8 + 3) - (2x + 3) \\ &= 2x + 11 - 2x - 3 \\ &= 11 - 3 \\ &= 8 \end{aligned}$	Cuando x crece de a 4, $h(x)$ siempre se multiplicará por un factor de $3^4 = 81$. $\begin{aligned} \frac{h(x+4)}{h(x)} &= \frac{3^{(x+4)}}{3^x} \\ &= \frac{3^x \cdot 3^4}{3^x} \\ &= 3^4 \\ &= 81 \end{aligned}$

Prueba a hacer esto

Esta es una función: $g(x) = 4^x$.

- Calcula $\frac{g(x+1)}{g(x)}$.
- Calcula $\frac{g(x+4)}{g(x)}$.
- Considera la función $f(x) = 4x + 10$. ¿Crecería $f(x+4)$ de forma semejante a como crecería $\frac{g(x+4)}{g(x)}$? Explica tu razonamiento.

Las funciones exponenciales pueden escribirse en la forma $f(x) = a \cdot b^x$, donde a es el *valor inicial* y b es el factor de crecimiento. Las funciones exponenciales representan el *aumento porcentual* repetido cuando el factor de crecimiento es superior a 1.

En situaciones que modelan un aumento porcentual repetido, el factor de crecimiento b puede escribirse como 1 (representa el 100%) más el aumento porcentual en forma decimal.

Por ejemplo, el valor de una colección de tarjetas de béisbol aumenta un 4% cada año. En 2020, la colección estaba valuada en \$500. Sea $f(x)$ el valor de la colección y x los años transcurridos desde 2020.

- Al principio, la colección estaba valuada en \$500. El valor inicial, o a , es 500.
- El valor aumenta un 4% cada año. Como el valor de las tarjetas aumenta en un porcentaje repetido cada año, podemos representar el crecimiento cambiando el porcentaje a un decimal (4% a 0.04) y sumando 1. El factor de crecimiento, o b , será de 1.04.

Podemos escribir la función exponencial que representa esta situación como $f(x) = 500 \cdot (1.04)^x$.

Prueba a hacer esto

Ramón el biólogo está estudiando una muestra de moho. Al inicio del estudio, el moho tenía un área de 12 centímetros cuadrados. El área del moho aumenta un 60% cada día.

- a** Determina qué ecuación corresponde a la situación en la que $m(x)$ representa el área de moho después de x días:
- A.** $m(x) = 12(0.06)^x$ **B.** $m(x) = 12(0.6)^x$ **C.** $m(x) = 12(1.06)^x$ **D.** $m(x) = 12(1.6)^x$
- b** Describe una situación que pueda representarse con una de las ecuaciones que no has elegido.

Las funciones exponenciales con un factor de crecimiento entre 0 y 1 representan el decaimiento exponencial. Puedes describir una relación que modela el decaimiento exponencial como una *disminución porcentual*.

En situaciones que modelan el decaimiento exponencial, el factor de crecimiento b puede escribirse como 1 (representa el 100%) menos el porcentaje de decaimiento en forma decimal.

Por ejemplo, una planta en maceta recibe 24 mililitros de abono. La cantidad de abono disminuye un 1% cada hora. Podemos escribir una función para representar esta situación en la forma $f(x) = a \cdot b^x$. Sea $f(x)$ la cantidad de abono que queda en la maceta y x el tiempo en horas transcurrido desde que la maceta recibió el abono.

- Al principio, la cantidad de abono es de 24 mililitros. El *valor inicial*, o a , es 24.
- La cantidad de abono disminuye un 1% cada hora. Como el abono disminuye en un porcentaje constante, podemos representar el decaimiento cambiando el porcentaje a decimal (1% a 0.01) y restándolo de 1. El factor de crecimiento, o b , será $1 - 0.01$ o 0.99.

Podemos escribir la función exponencial que representa esta situación como

$$f(x) = 24 \cdot (0.99)^x.$$

Prueba a hacer esto

Una olla caliente de frijoles tiene una temperatura de 204° . Se enfría a una tasa del 20% por minuto. Usa $f(t)$ para representar la temperatura de la olla t minutos después de sacar la olla del fuego.

Selecciona *todas* las ecuaciones que podrían modelar esta situación.

- ☐ A. $f(t) = 204(0.2)^t$
- ☐ B. $f(t) = 204(0.8)^t$
- ☐ C. $f(t) = 204(0.98)^t$
- ☐ D. $f(t) = 204(1 - 0.2)^t$
- ☐ E. $f(t) = 204(1 - 0.02)^t$

Puedes interpretar las funciones exponenciales en la forma $f(x) = a \cdot b^x$ y $f(x) = a \cdot b^x + k$ como ayuda para comprender las situaciones que representan.

Estas funciones describen dos métodos de tratamiento de unos grupos de algas. Cada función modela el tamaño de un grupo de algas, en metros cuadrados, x semanas después de utilizar el tratamiento en el lago.

$$h(x) = 250 \cdot (0.95)^x$$

- El tamaño inicial del grupo de algas en el lago es de 250 metros cuadrados.
- El factor de crecimiento es 0.95. El porcentaje de disminución semanal es del 5% porque $1 - 0.95 = 0.05$.
- Durante un largo periodo, el grupo de algas acabará disminuyendo de tamaño hasta cubrir cerca de 0 metros cuadrados.

$$j(x) = 250 \cdot (0.95)^x + 20$$

- El tamaño inicial del grupo de algas en el lago es de 270 metros cuadrados porque $250 \cdot (0.95)^0 + 20 = 250 + 20 = 270$.
- El valor de b es 0.95, lo que significa que la cantidad de algas está disminuyendo, ya que el valor es inferior a 1.
- Durante un largo periodo, las algas acabarán disminuyendo su tamaño hasta cubrir cerca de 20 metros cuadrados.

Prueba a hacer esto

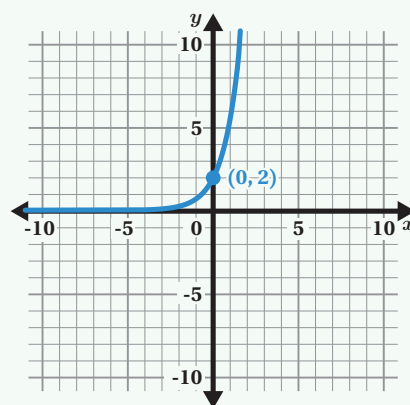
Escribe una ecuación exponencial que se ajuste a esta descripción:

- El tamaño inicial de un grupo de algas es de 150 metros cuadrados.
- El tamaño del grupo de algas disminuye a una tasa del 15% cada semana.
- Con el tiempo, el grupo de algas disminuirá hasta un tamaño muy próximo a los 7 metros cuadrados.

Esta es la gráfica de $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

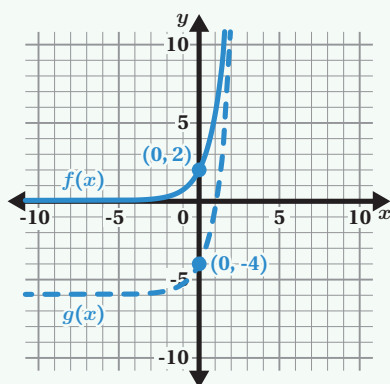
Las funciones pueden trasladarse de forma horizontal y vertical.

Estos son dos ejemplos de *traslaciones* de $f(x)$.



Traslaciones verticales

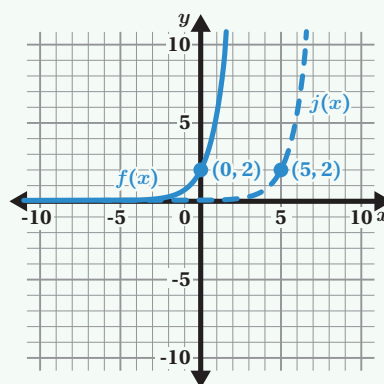
La ecuación $f(x) = 2 \cdot 3^x + k$ representa una traslación vertical de k unidades.



Aquí $f(x)$ se trasladó 6 unidades hacia abajo y se puede representar con la nueva ecuación: $g(x) = 2 \cdot 3^x - 6$.

Traslaciones horizontales

La ecuación $f(x) = 2 \cdot 3^{(x-h)}$ representa una traslación horizontal de h unidades.

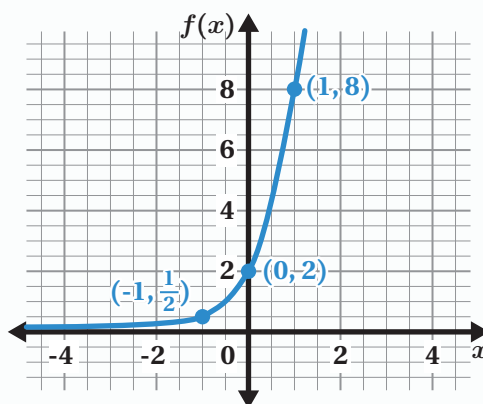


Aquí $f(x)$ se trasladó 5 unidades a la derecha y puede representarse con la nueva ecuación: $j(x) = 2 \cdot 3^{(x-5)}$.

Prueba a hacer esto

Esta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2 \cdot 4^x$.

- Escribe y grafica una ecuación $g(x)$ que represente $f(x)$ trasladada 2 unidades hacia arriba.
- Escribe y grafica una ecuación $h(x)$ que represente $f(x)$ trasladada 3 unidades a la derecha.



El símbolo $\sqrt{\quad}$ se denomina **radical**. Puedes escribir expresiones equivalentes utilizando radicales y **exponentes racionales**, exponentes que se escriben como una fracción.

Estos son algunos ejemplos de expresiones equivalentes.

Expresión radical	Expresión exponencial
$\sqrt{16}$	$16^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{125}$	$125^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{58}$	$58^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt[5]{70}$	$70^{\frac{1}{5}}$

Prueba a hacer esto

Completa la tabla.

Expresión radical	Expresión exponencial	Valor
$\sqrt{81}$		
	$81^{\frac{1}{4}}$	
$\sqrt[3]{343}$		
	$7776^{\frac{1}{5}}$	

Puedes escribir muchas expresiones equivalentes utilizando *radicales* y *exponentes racionales*.

Estos son algunos ejemplos.

	Expresiones equivalentes				
$x^{\frac{6}{5}}$	$(x^6)^{\frac{1}{5}}$	$(x^{\frac{1}{5}})^6$	$\sqrt[5]{x^6}$	$(\sqrt[5]{x})^6$	$\sqrt[5]{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}$
$9^{\frac{5}{2}}$	$(9^5)^{\frac{1}{2}}$	$(9^{\frac{1}{2}})^5$	$\sqrt{9^5}$	$(\sqrt{9})^5$	243
$16^{\frac{7}{4}}$	$(16^7)^{\frac{1}{4}}$	$(16^{\frac{1}{4}})^7$	$\sqrt[4]{16^7}$	$(\sqrt[4]{16})^7$	128

Prueba a hacer esto

Para cada expresión, selecciona *todas* las expresiones equivalentes.

a $x^{\frac{4}{3}}$

- ☐ A. $(x^4)^{\frac{1}{3}}$
- ☐ B. $(x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$
- ☐ C. $\sqrt[4]{x^3}$
- ☐ D. $\sqrt[3]{x^4}$
- ☐ E. $(\sqrt[3]{x})^4$

b $k^{\frac{6}{7}}$

- ☐ A. $(k^7)^{\frac{1}{6}}$
- ☐ B. $(k^{\frac{1}{6}})^7$
- ☐ C. $\sqrt[7]{k^6}$
- ☐ D. $\sqrt[{\frac{1}{7}}]{k^6}$
- ☐ E. $(\sqrt[7]{k})^6$

Puedes invertir tu dinero en cuentas que devengan intereses simples o compuestos. Las cuentas que devengan **intereses simples** pueden modelarse mediante funciones lineales, mientras que las cuentas que devengan **intereses compuestos** pueden modelarse mediante funciones exponenciales. Cuál cuenta devenga más intereses depende del tiempo que se disponga para invertir y de otras variables.

Veamos un ejemplo. Adah tiene \$100 para invertir en una cuenta. ¿Qué cuenta debe elegir si dispone de 12 años para invertir?

Interés simple	Interés compuesto
Adah podría invertir \$100 en una cuenta que devenga un interés simple anual del 10%. La función $a(t) = 100 + 10t$ modela el saldo de la cuenta al cabo de t años.	Adah podría invertir \$100 en una cuenta que devenga un interés compuesto anual del 10%. La función $b(t) = 100 \cdot (1.10)^t$ modela el saldo de la cuenta al cabo de t años.
Para determinar el saldo de la cuenta al cabo de 12 años, introduce $t = 12$ en cada función y determina el valor de $a(t)$.	
$a(12) = 100 + 10(12)$ $a(12) = 220$ Al cabo de 12 años, el saldo de la cuenta será de \$220.	$b(12) = 100 \cdot (1.10)^{12}$ $b(12) = 313.84$ Al cabo de 12 años, el saldo de la cuenta será de unos \$313.84.

Adah puede optar por invertir en la cuenta que devenga interés compuesto porque gana más dinero a lo largo de 12 años.

Prueba a hacer esto

Ahorras \$250 para invertirlos en una cuenta. Estas son las descripciones de dos opciones de cuenta:

Cuenta A	Cuenta B
Esta cuenta devenga 12% de interés compuesto anual.	Esta cuenta devenga 15% de interés simple anual.
a Escribe ecuaciones para modelar cada opción de cuenta donde x representa los años después de abrir la cuenta. b Si piensas invertir durante 3 años, ¿qué cuenta elegirías? Explica tu razonamiento. c Si piensas invertir durante 7 años, ¿qué cuenta elegirías? Explica tu razonamiento.	

Puedes escribir expresiones exponenciales que representen el interés compuesto de múltiples formas equivalentes para revelar información diferente sobre la cuenta y la situación.

Aquí hay un ejemplo.

La cantidad adeudada en un préstamo de \$400 tiene una tasa de interés mensual del 3%. Sea t el número de años transcurridos desde la contratación del préstamo si no se efectúan pagos.

- La expresión $400 \cdot 1.03^{12t}$ representa una tasa de interés mensual del 3% 12 veces cada año, t .
- La expresión $400 \cdot (1.03^{12})^t$ utiliza la ley de potencias para ayudarnos a pensar en la tasa de interés para cada año, t .
- Como $1.03^{12} = 1.4258$, la expresión $400 \cdot (1.4258)^t$ muestra la tasa de interés anual del 42.58%.

Cada expresión revela información diferente sobre las tasas de interés mensuales y anuales aplicadas a la cuenta. Aunque una tasa de interés mensual del 3% puede parecer que no afecta demasiado al saldo de la cuenta, la tasa de interés anual revela que el importe del préstamo aumenta un 42.58% cada año, ¡y eso sí que suma!

Prueba a hacer esto

Selecciona *todas* las expresiones que calculen el valor total de un préstamo de \$1,000 al cabo de 2 años. El préstamo tiene una tasa de interés mensual del 7% y no conlleva pagos adicionales.

- ☐ A. $1000 \cdot 1.07^{24}$
- ☐ B. $2000 \cdot 1.07^{12}$
- ☐ C. $1000 \cdot (1.07^{12})^2$
- ☐ D. $1000 \cdot 2.252^2$
- ☐ E. $1000 \cdot 1.1449^{12}$

Cuando pides un préstamo con una tarjeta de crédito, el tipo de interés anual puede capitalizarse en diferentes *intervalos* o períodos de tiempo.

Puedes usar la fórmula $P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para calcular el importe total de una cuenta que devenga intereses compuestos.

- P representa el importe inicial del préstamo. En finanzas se suele denominar *principal*.
- r representa el tipo de interés en forma decimal.
- n representa el número de intervalos de capitalización en un año.
- t representa el tiempo en años.

Periodos comunes de capitalización:

Anual	Semestral	Trimestral	Mensual	Diario
$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 12$	$n = 1365$

Veamos el impacto del interés compuesto aplicado a diferentes intervalos sobre un préstamo de \$1,000.

Interés	Adeudado en	Capitalización mensual	Capitalización trimestral	Capitalización anual
15% anual	5 años	$1000\left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12 \cdot 5}$ $\approx \$2,107.18$	$1000\left(1 + \frac{0.15}{4}\right)^{4 \cdot 5}$ $\approx \$2,088.15$	$1000(1 + 0.15)^5$ $\approx \$2,011.36$

Prueba a hacer esto

Iván quiere pedir un préstamo de \$2,500 para abrir un puesto de perros calientes.

Completa la tabla para ver cuánto debería Iván en distintos intervalos de capitalización.

Interés	Adeudado en	Capitalización mensual	Capitalización trimestral	Capitalización anual
20% anual	7 años	$2500\left(1 + \frac{0.2}{12}\right)^{12 \cdot 7}$ $\approx \$10021.69$		
9% anual	6 meses		$2500\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4 \cdot 0.5}$ $\approx \$2613.77$	

Se utilizan a menudo funciones exponenciales y lineales para modelar el crecimiento demográfico de una ciudad o un país. Los *modelos* pueden ayudarnos a predecir valores de datos desconocidos, incluidos valores futuros. Aunque algunos modelos pueden ser útiles, también tienen limitaciones.

- Las funciones exponenciales aumentan hacia el infinito, pero las poblaciones están limitadas por el espacio, el tiempo y la tierra disponible.
- Los modelos lineales pueden generar una intersección con y negativa, pero las poblaciones no tienen menos de 0 personas.
- Los modelos solo pueden ser útiles para predecir valores desconocidos dentro de un *dominio* específico.

Veamos un ejemplo. Estos son los datos sobre la población de una ciudad desde 1880.

Un modelo exponencial se ajusta mejor que un modelo lineal. Los datos se ajustan más a la forma de una curva que a la de una recta.

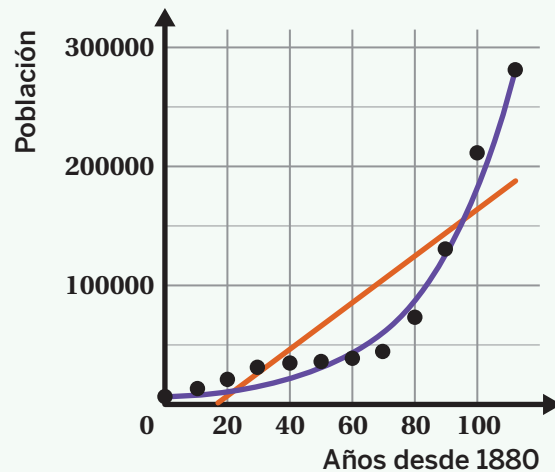
Puedes utilizar la función exponencial $p(t) = 3992(1.0397)^x$ para modelar el número de personas en 1945.

Como 1945 ocurre 65 años después de 1880, introduce 65 en $p(t)$ para estimar el valor desconocido.

$$p(65) = 3992(1.0397)^{65}$$

$$p(65) = 50143$$

El modelo estima que había 50,143 personas en 1945.



Prueba a hacer esto

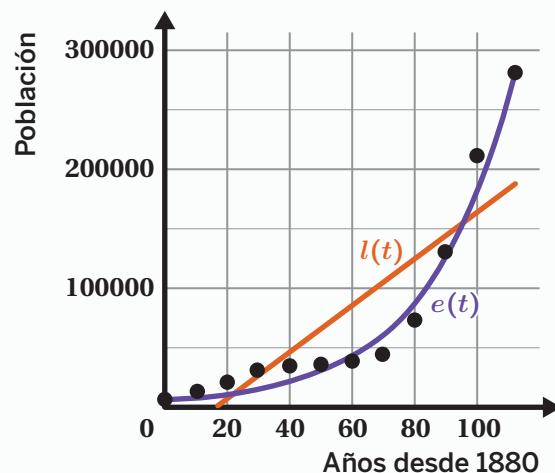
Esta es una gráfica de la población de Colorado de 1880 a 1990.

- a** ¿Cuál de los dos modelos crees que se ajusta mejor a los datos de la población de Colorado entre 1880 y 1990? Encierra una opción en un círculo.

Lineal

Exponencial

- b** ¿Cuáles son las limitaciones del modelo que elegiste?

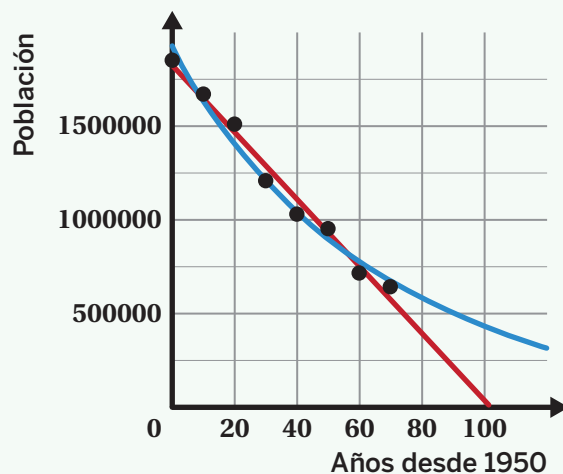


Puedes utilizar una calculadora gráfica para generar una línea de mejor ajuste o una curva exponencial de mejor ajuste para modelar datos. Este es un ejemplo de datos sobre la población de Detroit entre 1950 y 2020 que se utilizó para generar una línea y una curva exponencial de mejor ajuste.

La pendiente del *modelo* lineal significa que, cada 1 año, se prevé que la población de Detroit disminuya en unas 17,989 personas.

El factor de crecimiento del modelo exponencial significa que, cada 1 año, la población de Detroit disminuye aproximadamente un 1.56%.

El modelo que se utilice dependerá de lo bien que la función se ajuste a los datos. En este caso, ambos modelos se ajustan bien a los datos y pueden utilizarse para predecir valores desconocidos con precisión.



$$y_1 \sim mx_1 + b$$

$$y_1 \sim a \cdot b^{x_1}$$

Parámetros

Parámetros

$$m = -17989.3$$

$$a = 1912612$$

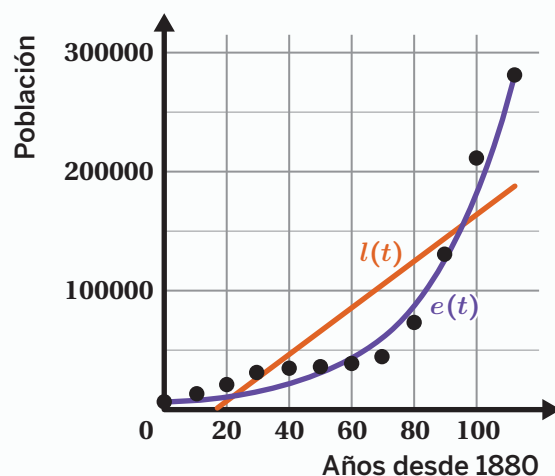
$$b = 1825460$$

$$b = 0.985051$$

Prueba a hacer esto

Esta es una gráfica de la población de Colorado de 1880 a 1990.

- Describe lo que representa la pendiente del modelo lineal en esta situación.
- Describe lo que representa el factor de crecimiento en el modelo exponencial.



Modelo lineal: $l(t) = 2075.25t - 38082.2$

Modelo exponencial: $e(t) = 3991.89 \cdot 1.03967^t$

Lección 1

- a Las respuestas pueden variar. 12 significa el número de suscriptores que tenía el canal de Marc cuando lo puso en marcha (a los 0 meses).
- b Las respuestas pueden variar. 2 significa que el número de suscriptores se duplica cada mes.
- c 3072 suscriptores

Lección 2

- a Exponencial. Las explicaciones pueden variar. Los valores de y tienen un factor de crecimiento constante de 3.
- b Lineal. Las explicaciones pueden variar. Los valores de y tienen una tasa de cambio constante de 25.

Lección 3

$$f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \text{ (o equivalente)}$$

Lección 4

Situación	Ecuación	Tabla	Gráfica										
En 2020, un arrecife de coral tenía un volumen de 20 metros cúbicos que cambió con un factor de $\frac{1}{2}$.	$v(t) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$	<table><tr><th>t</th><th>$v(t)$</th></tr><tr><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>1</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2.5</td></tr></table>	t	$v(t)$	0	20	1	10	2	5	3	2.5	
t	$v(t)$												
0	20												
1	10												
2	5												
3	2.5												

Lección 5

- a $h(-1) = 12$
- b $k(-1) = 25$
- c Las respuestas pueden variar. En la situación A, $h(-1)$ tiene sentido porque x representa los años transcurridos desde 2020. Esto significa que $h(-1)$ representa el año 2019. En la situación B, $k(-1)$ no tiene sentido porque x representa el número de horas transcurridas desde que Kiana terminó su té.

Lección 6

- a 4
- b 256
- c No. Las explicaciones pueden variar. $f(x + 4)$ no crece de forma semejante a $\frac{g(x+4)}{g(x)}$ porque $f(x)$ es una función lineal y $g(x)$ es una función exponencial. $f(x + 4)$ aumenta $f(x)$ en 16. $\frac{g(x+4)}{g(x)}$ multiplica $g(x)$ por un factor de 256.

Lección 7

- a D. $m(x) = 12(1.6)^x$
- b Las respuestas pueden variar.
 R: Ramón también está estudiando la eficacia de un desinfectante para eliminar el moho. El área original del moho era de 12 centímetros cuadrados. Cada hora, el desinfectante disminuye el área de moho en un 94%.
 B: La cantidad de carbono de un fósil decae a una tasa del 40% cada 10 años. El fósil tenía originalmente 12 moles de carbono.
 C: Fintastic Finny, el pez mágico, pesa 12 gramos y crece a una tasa del 6% por minuto.

Lección 8

B. $f(t) = 204(0.8)^t$

D. $f(t) = 204(1 - 0.2)^t$

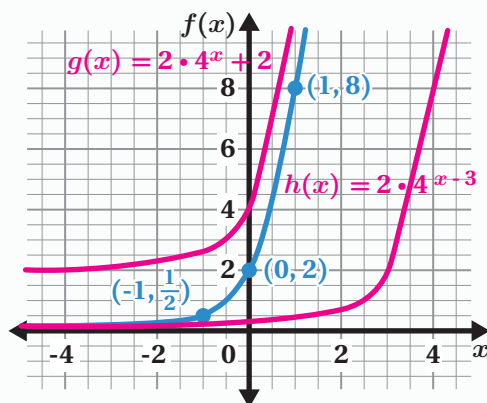
Lección 9

$f(x) = 143(1 - 0.15)^x + 7$ o $f(x) = 143(0.85)^x + 7$

Lección 10

a $g(x) = 2 \cdot 4^x + 2$

b $h(x) = 2 \cdot 4^{(x-3)}$



Lección 11

Expresión radical	Expresión exponencial	Valor
$\sqrt{81}$	$81^{\frac{1}{2}}$	9
$\sqrt[4]{81}$	$81^{\frac{1}{4}}$	3
$\sqrt[3]{343}$	$343^{\frac{1}{3}}$	7
$\sqrt[5]{7776}$	$7776^{\frac{1}{5}}$	6

Lección 12

- a A. $(x^4)^{\frac{1}{3}}$
D. $\sqrt[3]{x^4}$
E. $(\sqrt[3]{x})^4$
- b C. $\sqrt[7]{k^6}$
E. $(\sqrt[7]{k})^6$

Lección 13

- a Cuenta A: $a(x) = 250 \cdot 1.12^x$
Cuenta B: $b(x) = 250 + 37.5x$
- b Cuenta B. Las explicaciones pueden variar. Al cabo de 3 años, la cuenta B tendrá \$362.50 mientras que la cuenta A solo tendrá aproximadamente \$351.23.
- c Cuenta A. Las explicaciones pueden variar. Al cabo de 7 años, la cuenta A tendrá aproximadamente \$552.67 mientras que la cuenta C solo tendrá \$512.50.

Lección 14

- A. $1000 \cdot 1.07^{24}$
C. $1000 \cdot (1.07^{12})^2$
D. $1000 \cdot 2.252^2$
E. $1000 \cdot 1.1449^{12}$

Lección 15

Interés	Adeudado en	Capitalización mensual	Capitalización trimestral	Capitalización anual
20% anual	7 años	$2500\left(1 + \frac{0.2}{12}\right)^{12 \cdot 7}$ $\approx \$10021.69$	$2500\left(1 + \frac{0.2}{4}\right)^{4 \cdot 7}$ $\approx \$9800.32$	$2500\left(1 + \frac{0.2}{1}\right)^{1 \cdot 7}$ $\approx \$8957.95$
9% anual	6 meses	$2500\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12 \cdot 0.5}$ $\approx \$2614.63$	$2500\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4 \cdot 0.5}$ $\approx \$2613.77$	$2500\left(1 + \frac{0.09}{1}\right)^{1 \cdot 0.5}$ $\approx \$2610.08$

Lección 16

- a Exponencial
- b *Las respuestas pueden variar. A medida que pasa el tiempo, tanto la población como el modelo aumentan hacia el infinito. Este modelo no tiene en cuenta las restricciones sobre la vivienda y el suelo. Además, este modelo no tiene en cuenta ningún acontecimiento meteorológico o histórico que pudiera afectar drásticamente a la población en un momento dado.*

Lección 17

- a La pendiente del modelo lineal representa un aumento de la población de unas 2075 personas cada año.
- b Cada 1 año la población aumenta alrededor de un 4%.

Algebra 1 Unit 6 Glossary/Álgebra 1 Unidad 6 Glosario

English

B

base A number or expression that is raised to an exponent. The exponent describes the number of times to multiply the base by itself.

For example, in the expression 2^3 , 2 is the base and 3 is the exponent. In the expression $50(1.6)^{12x}$, 1.6 is the base and $12x$ is the exponent.

C

compound interest Interest calculated based on the initial amount and the interest from previous periods. It is calculated at regular intervals (daily, monthly, annually, etc.). The balance in an account that earns compound interest can be modeled by an exponential function.

cube root The cube root of a number n (written as $\sqrt[3]{n}$) is the number that can be cubed to get n . The cube root is also the edge length of a cube with a volume of n .

For example, the cube root of 64 ($\sqrt[3]{64}$) is 4 because 4^3 is 64. 4 is also the edge length of a cube that has a volume of 64 cubic units.

E

exponent Exponents describe repeated multiplication. The exponent describes the number of times to multiply the base by itself.

For example, in the expression 2^3 , 2 is the base and 3 is the exponent. In the expression $50(1.6)^{12x}$, 1.6 is the base and $12x$ is the exponent.

Español

base Un número o una expresión que se eleva a un exponente. El exponente describe el número de veces que se multiplica la base por sí misma.

Por ejemplo, en la expresión 2^3 , 2 es la base y 3 es el exponente. En la expresión $50(1.6)^{12x}$, 1.6 es la base y $12x$ es el exponente.

interés compuesto Interés que se calcula según una cantidad inicial y el interés de los períodos anteriores. Se calcula en intervalos regulares (diariamente, mensualmente, anualmente, etc.). El saldo de una cuenta que produce interés compuesto puede modelarse con una función exponencial.

raíz cúbica La raíz cúbica de un número n (se escribe $\sqrt[3]{n}$) es el número que puede elevarse al cubo para obtener n . La raíz cúbica también es la longitud de la arista de un cubo con un volumen de n .

Por ejemplo, la raíz cúbica de 64 ($\sqrt[3]{64}$) es 4 porque 4^3 es 64. 4 también es la longitud de arista de un cubo que tiene un volumen de 64 unidades cúbicas.

exponente Los exponentes describen una multiplicación repetida. El exponente describe el número de veces que se multiplica la base por sí misma.

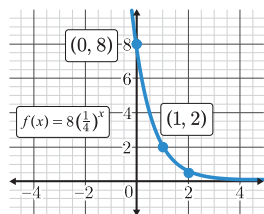
Por ejemplo, en la expresión 2^3 , 2 es la base y 3 es el exponente. En la expresión $50(1.6)^{12x}$, 1.6 es la base y $12x$ es el exponente.

English

exponential decay

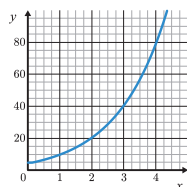
An exponential relationship that decreases. An exponential decay relationship has a growth factor between 0 and 1.

For example, $f(x) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^x$ is an example of exponential decay because the growth factor, $\frac{1}{4}$, is between 0 and 1.



exponential function A function that increases or decreases by a constant ratio. A function that changes by equal factors over equal intervals.

x	$f(x)$
0	5
1	10
2	20
3	40

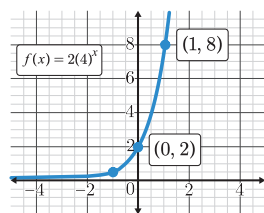


For example, the table and graph show the exponential function $f(x) = 5 \cdot (2)^x$ which has an initial value of 5 and has a growth factor of 2.

exponential growth

An exponential relationship that increases. An exponential growth relationship has a growth factor greater than 1.

For example, $f(x) = 2(4)^x$ is an example of exponential growth because the growth rate, 4, is greater than 1.

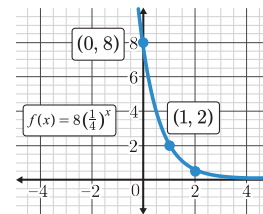


Español

decaimiento exponencial

Una relación exponencial que decrece. Una relación de decaimiento exponencial tiene un factor de crecimiento entre 0 y 1.

Por ejemplo, $f(x) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^x$ es un ejemplo de decaimiento exponencial porque el factor de crecimiento, $\frac{1}{4}$, está entre 0 y 1.

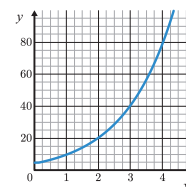


función exponencial

Una función que crece o decrece a razón constante. Una función que cambia por factores iguales en intervalos iguales.

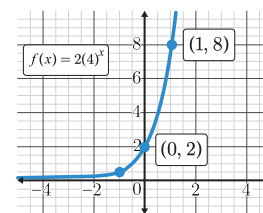
Por ejemplo, la tabla y la gráfica muestran una función exponencial $f(x) = 5 \cdot (2)^x$ que tiene un valor inicial de 5 y un factor de crecimiento de 2.

x	$f(x)$
0	5
1	10
2	20
3	40



crecimiento exponencial Una relación exponencial que crece. Una relación con crecimiento exponencial tiene un factor de crecimiento mayor que 1.

Por ejemplo, $f(x) = 2(4)^x$ es un ejemplo de crecimiento exponencial porque la tasa de crecimiento, 4, es mayor que 1.



F

factor (of a number or expression) A number or expression multiplied with other numbers or expressions to make a product.

For example, 1, 2, 4, and 8 are all factors of the number 8 because $1 \cdot 8 = 8$ and $2 \cdot 4 = 8$. Also, $(x + 3)$ and $(x - 5)$ are factors of $x^2 - 2x - 15$ because $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

factor (de un número o una expresión)

Un número o una expresión que se multiplica por otros números o expresiones para dar como resultado un producto.

Por ejemplo, 1, 2, 4 y 8 son factores del número 8 porque $1 \cdot 8 = 8$ y $2 \cdot 4 = 8$. Además, $(x + 3)$ y $(x - 5)$ son factores de $x^2 - 2x - 15$ porque $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

Algebra 1 Unit 6 Glossary/Álgebra 1 Unidad 6 Glosario

English

Español

G

growth factor The constant ratio (or common factor) that each term is multiplied by to generate an exponential pattern.

factor de crecimiento La razón constante (o el factor común) que multiplica a cada término para generar un patrón exponencial.

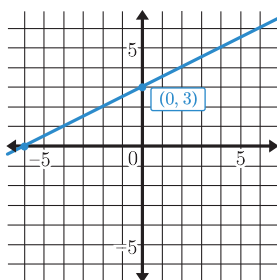
I

index In a radical $\sqrt[n]{x}$ the quantity n is called the index. (See *radical*.)

índice En un radical $\sqrt[n]{x}$, la cantidad n se llama índice. (Ver *radical*.)

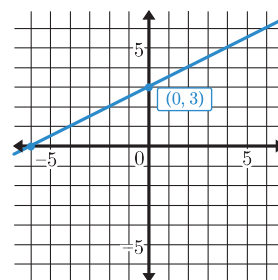
initial value A point where the graph of an equation or function crosses the y -axis or when $x = 0$.

The initial value of the graph $-2x + 4y = 12$ is $(0, 3)$, or just 3.



valor inicial Un punto donde la gráfica de una ecuación o función cruza el eje y , o cuando $x = 0$.

El valor inicial de la gráfica de $-2x + 4y = 12$ es $(0, 3)$, o simplemente 3.



L

linear function

A function that increases or decreases by a constant rate of change, or shows a linear relationship. A function that changes by equal differences over equal intervals. The graph of a linear function is a line.

For example, $f(x) = 5 + 6x$ represents a linear function that has an initial value of 5 and increases by a constant difference of 6.

x	$f(x)$
0	5
1	11
2	17
3	23

función lineal Función que crece o decrece con una tasa de cambio constante o muestra una relación lineal. Una función que cambia con diferencias iguales en intervalos iguales. La gráfica de una función lineal es una recta.

Por ejemplo, $f(x) = 5 + 6x$ representa una función lineal que tiene un valor inicial de 5 y crece con una diferencia constante de 6.

x	$f(x)$
0	5
1	11
2	17
3	23

P

percent decrease Describes how much a quantity goes down, expressed as a percent of the starting amount.

For example, the function $f(x) = 1000(.78)^x$ represents the value of a phone with an initial value of \$1,000 with a percent decrease in value of 22% each year, x .

disminución porcentual Describe cuánto disminuye una cantidad y se expresa como un porcentaje de la cantidad inicial.

Por ejemplo, la función $f(x) = 1000(.78)^x$ representa el valor de un teléfono con un valor inicial de \$1,000 y una disminución porcentual del 22% de su valor cada año, x .

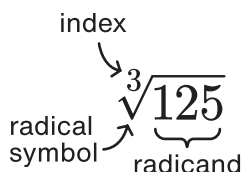
English

percent increase Describes how much a quantity goes up, expressed as a percent of the starting amount.

For example, the function $f(x) = 50(1.12)^x$ represents an account balance with an initial value of \$50 with a percent increase of 12% each year, x .

principal The total amount (initial value) of money borrowed or invested, not including any interest.

radical A square root, cube root, fourth root, etc. The radical symbol is $\sqrt{}$.



radicand The expression under a radical symbol. In a radical $\sqrt[n]{x}$ the quantity x is called the radicand. (See *radical*.)

rational exponent An exponent that is written as a fraction.

In the expression $5^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}$ is a rational exponent.

reciprocal The reciprocal of a fraction $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$. The product of two fractions that are reciprocals of one another is 1.

For example, $\frac{3}{2}$ and $\frac{2}{3}$ are reciprocals because $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1$.

root A square root, cube root, fourth root, etc. The radical symbol is $\sqrt{}$.

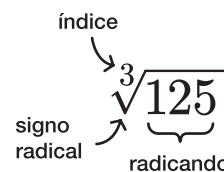
Español

aumento porcentual Describe cuánto incrementa una cantidad y se expresa como un porcentaje de la cantidad inicial.

Por ejemplo, la función $f(x) = 50(1.12)^x$ representa el saldo de una cuenta con un valor inicial de \$50 y un aumento porcentual del 12% cada año, x .

principal La cantidad total (valor inicial) de un préstamo o una inversión de dinero, sin incluir los intereses.

radical Una raíz cuadrada, raíz cúbica, raíz cuarta, etc. El signo radical es $\sqrt{}$.



radicando La expresión bajo un signo radical. En un radical $\sqrt[n]{x}$, la cantidad x se llama radicando. (Ver *radical*.)

exponente racional Un exponente que se escribe como una fracción.

En la expresión $5^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}$ es un exponente racional.

recíproco El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$. El producto de dos fracciones que son recíprocas entre sí es 1.

Por ejemplo, $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son recíprocos porque $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1$.

raíz Una raíz cuadrada, raíz cúbica, raíz cuarta, etc. El signo radical es $\sqrt{}$.

R

S

simple interest Interest that is calculated solely based on the initial amount. The balance in an account with simple interest is modeled by a linear function.

interés simple Interés que se calcula únicamente en función de la cantidad inicial. El saldo de una cuenta con interés simple se modela con una función lineal.

Algebra 1 Unit 6 Glossary/Álgebra 1 Unidad 6 Glosario

English

square root The square root of a number n (written as $\sqrt{n}$) is the positive number that can be squared to get n . The square root is also the side length of a square with an area of n .

The square root of 16 ($\sqrt{16}$) is 4 because 4^2 is 16. The $\sqrt{16}$ is also the side length of a square that has an area of 16.

Español

raíz cuadrada La raíz cuadrada de un número n (se escribe $\sqrt{n}$) es el número positivo que puede elevarse al cuadrado para obtener n . La raíz cuadrada también es la longitud de lado de un cuadrado con un área de n .

La raíz cuadrada de 16 ($\sqrt{16}$) es 4 porque 4^2 es 16. La $\sqrt{16}$ también es la longitud de lado de un cuadrado que tiene un área de 16.

T

transformation A rule for moving or changing figures on a plane or functions on a graph. Transformations include translations, reflections, rotations, dilations, stretches, and compressions.

transformación Una regla para mover o cambiar figuras en un plano o bien funciones en una gráfica. Las transformaciones incluyen traslaciones, reflexiones, rotaciones, dilataciones, estiramientos y compresiones.