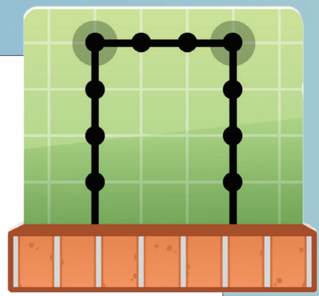


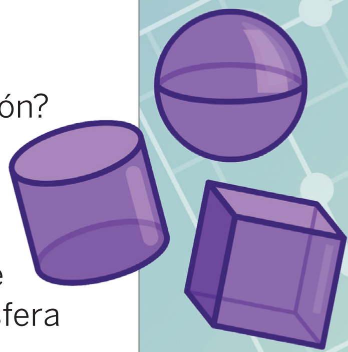
Unidad 5

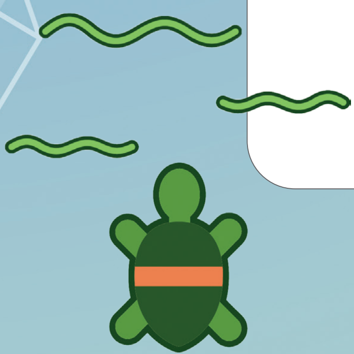
Funciones y volumen

Aprenderás sobre funciones por primera vez. Estudiarás cómo se representan las funciones y las analizarás en el contexto del volumen de cilindros, conos y esferas.

Preguntas esenciales

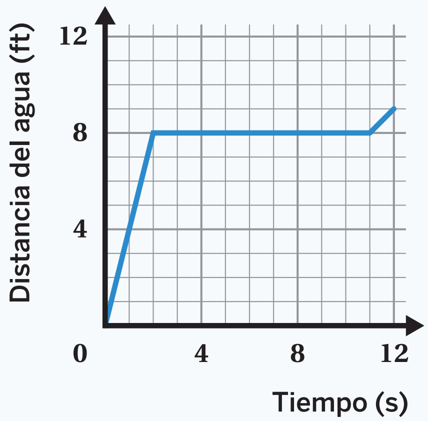
- ¿Qué hace que una relación sea una función?
- ¿Cómo nos ayudan las funciones a representar situaciones?
- ¿Cuáles son algunas de las relaciones que existen entre un cilindro, un cono y una esfera que comparten dimensiones comunes?





Resumen | Lección 1

Puedes usar una gráfica para representar una situación. Analizar un punto en una gráfica o partes de una gráfica puede ayudarte a interpretar la situación.

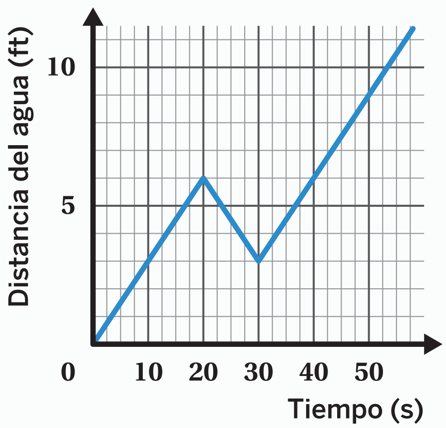


Por ejemplo, esta gráfica representa el trayecto de una tortuga a través de la arena. Una tortuga camina durante 2 segundos hasta que se encuentra a 8 pies del agua. Se detiene por 9 segundos y continúa alejándose del agua.

El punto $(6, 8)$ representa la distancia de la tortuga e indica que está a 8 pies del agua después de 6 segundos.

Prueba a hacer esto

Esta es la gráfica del trayecto de una tortuga que sale del océano.



a ¿Qué nos comunica esta gráfica acerca del trayecto de la tortuga?

b ¿Cuál es la distancia de la tortuga al agua a los 40 segundos?

c ¿Cuándo está la tortuga a 3 pies del agua?

Resumen | Lección 2

Una función es una regla que asigna exactamente una salida a cada entrada posible. Otra forma de decir esto es que la salida es una función de la entrada.

Es una función

Entrada	Salida
15	7
10	7
20	8
5	9

En esta tabla de función, cada entrada tiene exactamente una salida. Si una entrada se repitiera en la tabla, debería tener la misma salida que haya tenido anteriormente en la tabla.

No es una función

Entrada	Salida
10	6
10	7
20	8
5	9

Observa que, en esta tabla, la entrada 10 aparece dos veces con distintas salidas.

Prueba a hacer esto

Decide si cada regla representa una función o no. Explica tu razonamiento.

Regla A

Entradas posibles: Cualquier persona

Salidas: El mes en el que nació la persona

a ¿Representa la regla A una función? Explica tu razonamiento.

Regla B

Entradas posibles: Cualquier mes

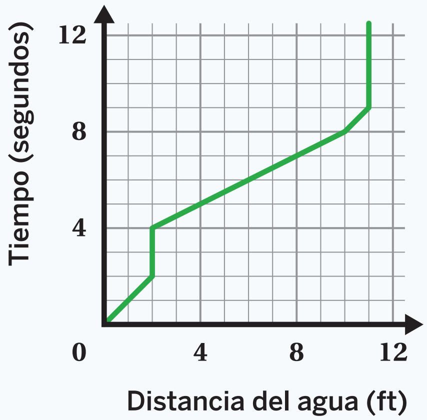
Salidas: Una persona nacida en ese mes

b ¿Representa la regla B una función? Explica tu razonamiento.

Una gráfica representa una función cuando cada valor de x, o entrada, tiene un único valor correspondiente de y, o salida. Si una gráfica tiene múltiples valores de y para el mismo valor de x, no representa una función.

A continuación se muestran dos gráficas del recorrido de la misma tortuga.

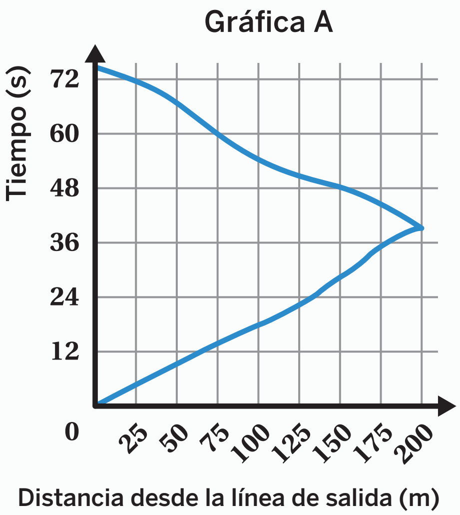
Esta gráfica representa una función porque para cada segundo, x, la tortuga tiene una única distancia, y, correspondiente.

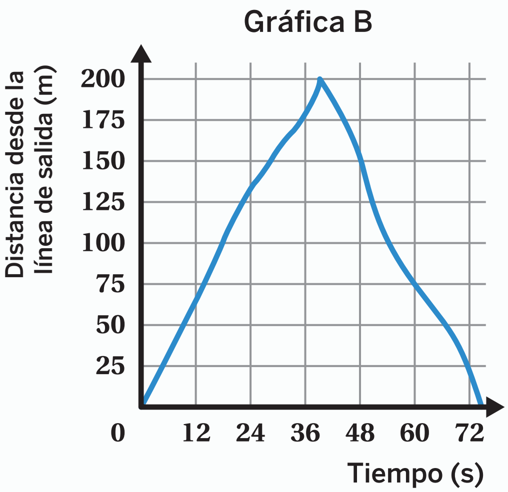


Esta gráfica no representa una función porque para los valores tanto de 2 pies como de 11 pies, la tortuga tiene varios tiempos correspondientes.

Prueba a hacer esto

Arianna da una vuelta a la pista corriendo. Las gráficas muestran la relación entre su tiempo y la distancia a la que se encuentra de la línea de salida.





¿Qué gráfica representa una función? Explica tu razonamiento.

Resumen | Lección 4

En una situación representada por una función, la entrada a menudo se denomina **variable independiente** y la salida se denomina **variable dependiente**. La variable independiente y la variable dependiente pueden cambiar dependiendo del problema que se esté tratando de resolver.

La variable independiente es una entrada. La variable dependiente, la salida, depende de la entrada.

Por ejemplo, en esta situación, m representa el número total de millas caminadas y d representa la cantidad de días de caminata de alguien que camina 2 millas por día.

Pregunta	Variables independiente y dependiente	Ecuación	Explicación
¿Cuántas millas he caminado, m, después de d días?	Independiente: Días, d Dependiente: Millas, m	$m = 2d$	El número de millas caminadas depende del número de días de caminata.
¿Cuántos días, d, me tomará caminar m millas?	Independiente: Millas, m Dependiente: Días, d	$d = \frac{m}{2}$	El número de días depende del número de millas.

Prueba a hacer esto

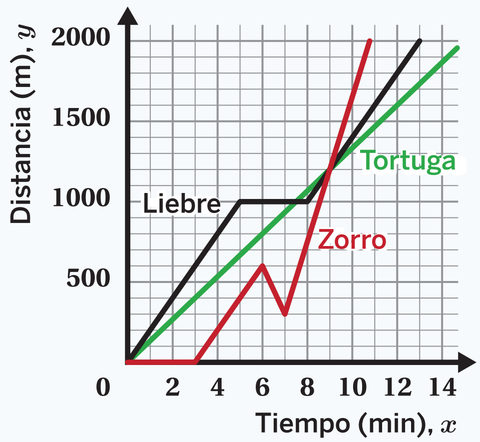
En cada situación, completa la tabla con las posibles variables independientes y dependientes.

Pregunta o ecuación	Variable independiente	Variable dependiente
¿Cuántos sándwiches puedo hacer?	Número de rebanadas de pan	Número de sándwiches
¿Cuánto cuesta mi helado si pido distintas cantidades de coberturas?		Costo de mi cono de helado
¿Cómo influyen las horas de sueño en el desempeño en los exámenes?		
$y = 3x + 5$		

Resumen | Lección 5

Una gráfica puede resultar útil para comparar varias funciones en una situación, por ejemplo, usando el valor inicial, la pendiente y los puntos de intersección.

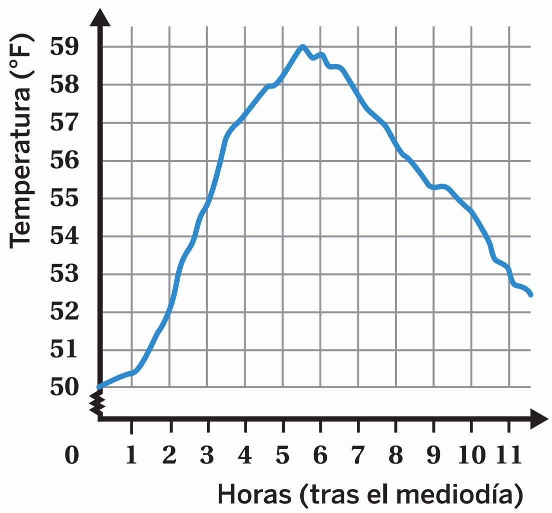
Esta gráfica representa una carrera entre una liebre, una tortuga y un zorro. De 0 a 5 minutos, la liebre se mueve a una tasa constante de 200 metros por minuto y está en primer lugar. A los 9 minutos, la carrera está empatada. El zorro no empieza la carrera hasta que han pasado tres minutos, pero acelera a los 7 minutos hasta alcanzar una velocidad de 450 metros por minuto. El zorro gana la carrera aproximadamente a los 11 minutos.



Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la temperatura entre el mediodía y la medianoche del viernes.

a. Cuenta un relato sobre la temperatura de este día.

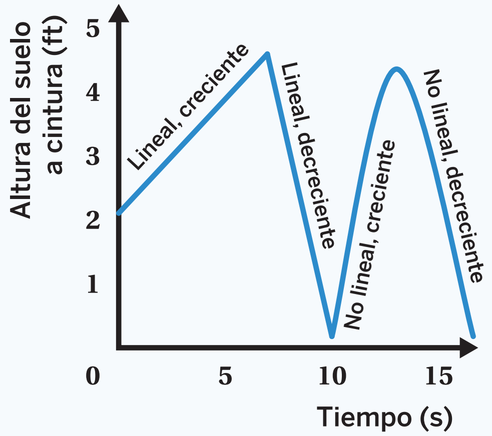


b. ¿Hacía más calor a las 3 p.m. o a las 9 p.m.? Explica tu razonamiento.

Las gráficas son herramientas útiles para representar una situación o relato. Al dibujar una gráfica, puede ser útil identificar las variables relevantes para poder identificar los ejes necesarios. Según las variables independiente y dependiente seleccionadas, distintos tipos de gráficas pueden destacar diferentes aspectos de la misma situación. También resulta útil identificar los puntos clave de la situación de acuerdo con estas variables, lo cual te facilita el trazado de estas características en la gráfica.

La función es:

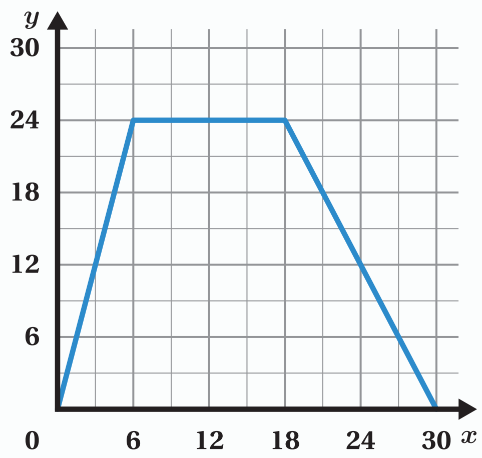
- **Creciente** cuando parte de la gráfica va subiendo de izquierda a derecha.
- **Decreciente** cuando parte de la gráfica va bajando de izquierda a derecha.
- *Lineal* cuando parte de la gráfica es una recta. (Nota: Una recta vertical no es una función.)
- **No lineal** cuando parte de la gráfica no es una recta.



Prueba a hacer esto

Usa algunos de los términos que aparecen a continuación para escribir un relato que pueda modelarse con la gráfica.

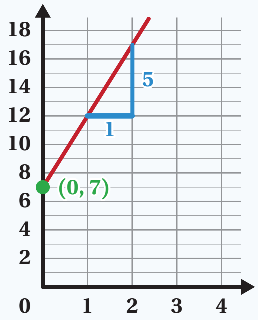
Banco de palabras	
lineal	no lineal
creciente	decreciente



Resumen | Lección 7

Las relaciones lineales que tienen exactamente una salida para cada entrada posible se denominan **funciones lineales**. Todas las funciones lineales se pueden representar con una ecuación en la forma $y = mx + b$, donde m es la tasa de cambio y b es el valor inicial.

Gráfica



Tabla

x	y
0	7
1	12
2	17

Ecuación

$y = 5x + 7$

La pendiente, o tasa de cambio, es una razón entre la diferencia de los valores de y y la diferencia de los valores de x. En una gráfica, puedes usar triángulos de pendiente para hallar la tasa de cambio. En la ecuación $y = mx + b$, es el coeficiente de la variable independiente. En este ejemplo, la pendiente es $\frac{5}{1} = 5$.

El valor inicial, o intersección con el eje y, es el valor dependiente cuando el valor independiente es 0. En la ecuación $y = mx + b$, la intersección con el eje y es la constante, b. En este ejemplo, la intersección con el eje y es 7.

Prueba a hacer esto

Shanice y Abdul abren cuentas bancarias el mismo día.

Cuenta de Shanice

$S = 9w + 60$ modela la cantidad de dinero en la cuenta bancaria de Shanice, donde S es la cantidad de dinero y w es el número de semanas transcurridas desde que se abrió la cuenta.

Cuenta de Abdul

Semanas desde que se abrió la cuenta	Cantidad en la cuenta ($)
0	65
2	75
4	85
6	95
8	105

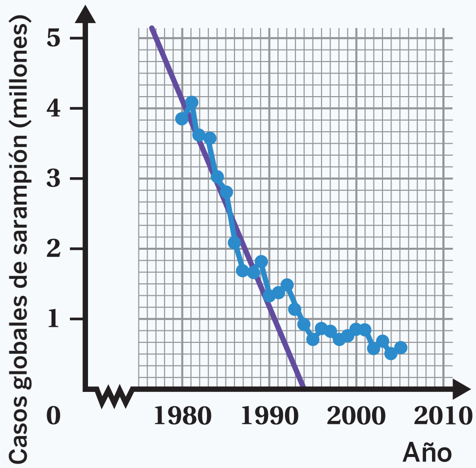
a ¿Quién empieza con más dinero en su cuenta? Explica tu razonamiento.

b ¿Quién está ahorrando dinero más rápidamente? Explica tu razonamiento.

A veces, una situación puede modelarse mediante una función lineal. Incluso si una función es no lineal, partes de sus datos pueden modelarse mediante una función lineal, que puede usarse como ayuda para realizar predicciones.

Por ejemplo, puedes utilizar una función lineal para modelar una sección de estos datos sobre los casos globales de sarampión entre 1980 y 1990.

Puedes utilizar este modelo para estimar que en 1985 habría habido aproximadamente 2.5 millones de casos de sarampión.



Fuente: *Our World in Data*

Prueba a hacer esto

a Selecciona *todas* las situaciones que podrían modelarse con una función lineal.

- ☐ **A.** Daeja saca grandes puñados de palomitas de maíz de su bolsa del almuerzo cada 5 minutos y luego empieza a sacar puñados más pequeños.
- ☐ **B.** Una planta crece lo mismo cada semana.
- ☐ **C.** El día empezó muy caluroso, se fue enfriando poco a poco por la tarde y luego la temperatura bajó de repente cuando se puso el sol.
- ☐ **D.** Una tableta se carga a una tasa de 5% por minuto hasta alcanzar el 80%; después, se carga a una tasa más lenta.
- ☐ **E.** Marco está llenando una botella con agua en la fuente.

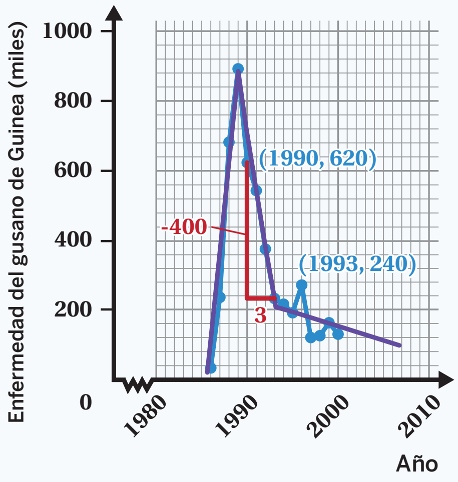
b ¿Cuáles son algunas limitaciones de utilizar una función lineal para modelar una de las situaciones que seleccionaste?

Resumen | Lección 9

Puedes usar uno o más segmentos de recta para representar un conjunto de datos. El uso de múltiples segmentos de recta puede ayudarte a representar con precisión un conjunto de datos.

Por ejemplo, puedes utilizar múltiples segmentos de recta para modelar estos datos sobre los casos de la enfermedad del gusano de Guinea a lo largo del tiempo.

Se puede utilizar este modelo para estimar que entre 1990 y 1993 los casos de enfermedad del gusano de Guinea cambiaron a una tasa de aproximadamente $-\frac{400}{3}$ casos por año, o disminuyeron en aproximadamente 133.33 mil casos por año.

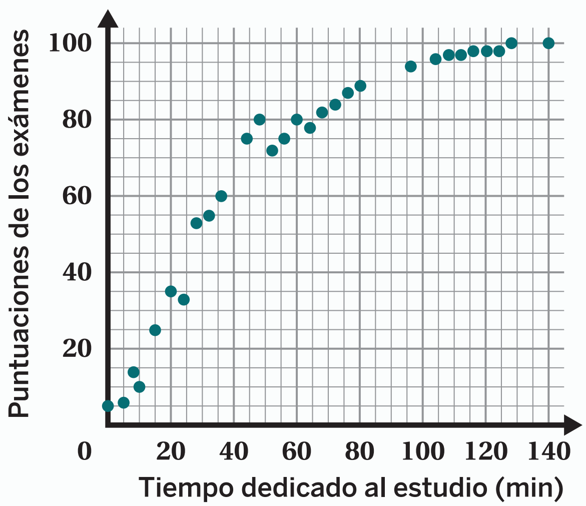


Fuente: *Our World in Data*

Prueba a hacer esto

Esta es una gráfica que modela puntuaciones de exámenes y el tiempo dedicado a estudiar.

a Utiliza al menos tres segmentos lineales para trazar una función en la gráfica que modele el conjunto de datos.



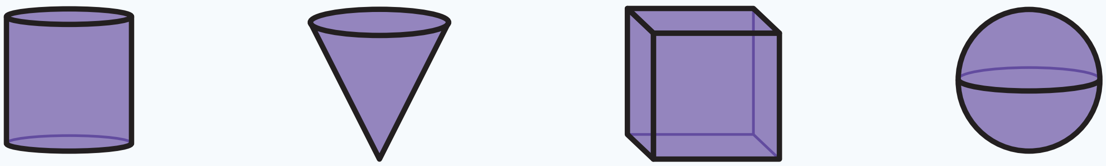
b Un estudiante dedicó 85 minutos a estudiar. Predice la calificación de su examen.

Resumen | Lección 10

El *volumen* de un objeto es el número de unidades cúbicas que llenan una región tridimensional sin vacíos ni superposiciones.

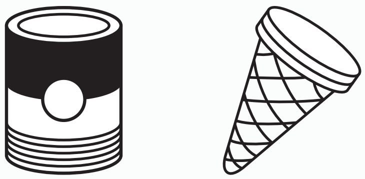
A menudo se pueden determinar las relaciones entre los volúmenes de diferentes figuras con medidas similares. Por ejemplo, si la base de un **cono** y un **cilindro** tienen el mismo *diámetro* y altura, entonces el cilindro tendrá un volumen tres veces mayor que el del cono.

También existen relaciones entre los volúmenes de una misma figura con diferentes medidas. Por ejemplo, si el diámetro de una **esfera** se duplica, o si la longitud de arista de un cubo se duplica, el volumen original de estas figuras se multiplicará por 8.



Prueba a hacer esto

Un cono de helado y una lata de sopa tienen el mismo diámetro.

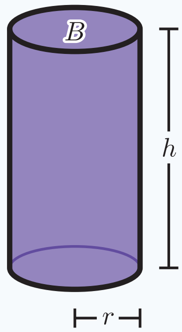


Describe la relación entre el volumen de estos dos elementos. Explica tu razonamiento.

Resumen | Lección 11

Un prisma tiene dos bases congruentes unidas por rectas perpendiculares. Su volumen se puede determinar multiplicando el área de su base por su altura. Un cilindro tiene dos círculos congruentes como bases y los lados son perpendiculares a las bases. Esto significa que también puedes determinar el volumen de un cilindro multiplicando el área de su base por la altura.

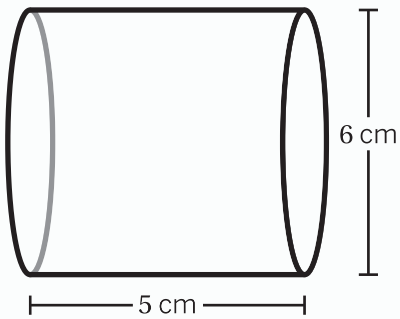
Si conoces el radio y la altura de un cilindro, entonces puedes determinar el volumen del cilindro. El área base se determina usando la expresión $\pi \cdot r^2$. El volumen, en unidades cúbicas, se puede determinar multiplicando el área de la base por la altura, h. La fórmula para el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 \cdot h$.



$V = \pi r^2 \cdot h$

Prueba a hacer esto

Aquí tienes un cilindro.

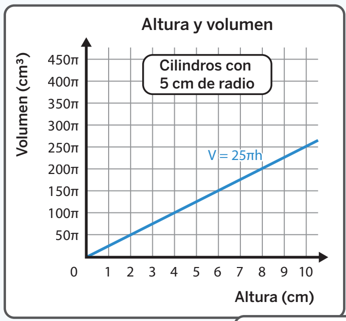


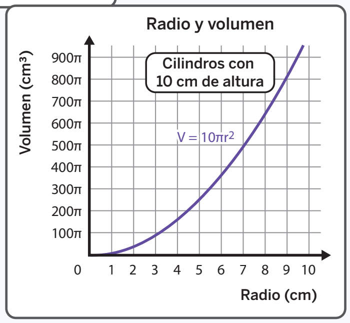
a Halla el área de la base del cilindro.

b Halla el volumen del cilindro.

Resumen | Lección 12

El volumen de un cilindro depende del radio y la altura. La fórmula del volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r representa el radio y h la altura.



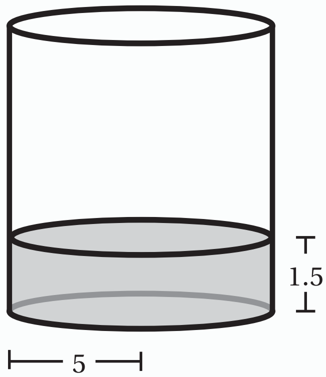


Cuando la altura de un cilindro, h, crece a una tasa constante, el volumen del cilindro, V, también crece a una tasa constante. Esto significa que existe una relación lineal proporcional entre la altura y el volumen. Por eso podemos representar la relación entre el volumen y la altura con una línea recta.

Por otra parte, *no podemos* representar la relación entre el radio y el volumen de un cilindro con una recta, ya que la razón entre el volumen y el radio cambia a medida que aumenta el radio. Por ese motivo, la gráfica de la relación entre el radio y el volumen es curva y no lineal.

Prueba a hacer esto

Este es un florero con forma de cilindro.



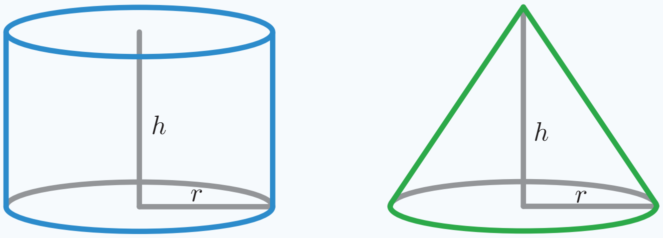
a Si se triplica la altura del agua, ¿se triplicará el volumen del agua dentro del recipiente? Explica tu razonamiento.

b Si se triplica el radio del florero, ¿se triplicará el volumen dentro del recipiente? Explica tu razonamiento.

Resumen | Lección 13

Aprendimos que podemos hallar el volumen de un cilindro calculando $V = \pi r^2 \cdot h$. Si un cono y un cilindro tienen la misma base y la misma altura, entonces el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro.

Si se conoce el radio y la altura, podemos determinar el volumen usando esta fórmula para un cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.



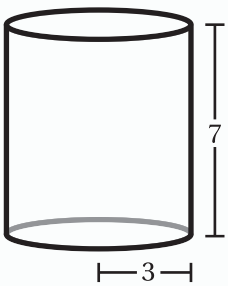
Volumen de un cilindro:
$V = \pi r^2 h$

Volumen de un cono:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Prueba a hacer esto

Aquí tienes un cilindro.

Halla el volumen de un cono con las mismas dimensiones que el cilindro. Dibuja el cono si te ayuda a razonar.

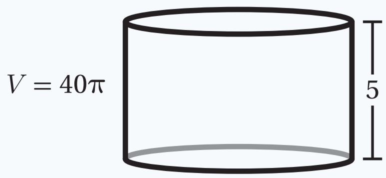


Resumen | Lección 14

El volumen de un cilindro y de un cono depende de sus radios y alturas. En ambos casos, si conoces el radio y la altura, puedes determinar el volumen usando la fórmula $V = \pi r^2 h$ (para cilindros) y $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (para conos).

Y si conoces el volumen y el radio o la altura, también puedes determinar las otras dimensiones.

Por ejemplo, si un cilindro tiene una altura de 5 pulgadas y un volumen de 40π, puedes calcular el área de la base dividiendo el volumen por la altura: $\frac{40\pi}{5} = 8\pi$.



$$40\pi = B \cdot 5$$

$$8\pi = B$$

Prueba a hacer esto

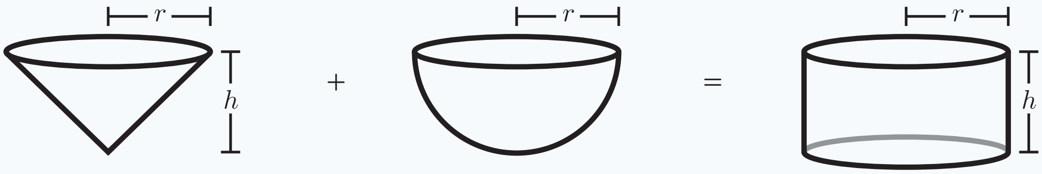
Halla las dimensiones que faltan de cada objeto (redondeadas a la décima más próxima). Usa 3.14 como aproximación de π. Dibuja las figuras si te ayuda a razonar.

a Un cilindro tiene un radio de 4 centímetros y un volumen de 80π centímetros cúbicos. ¿Cuál es la altura del cilindro?

b Un cilindro con un volumen de 405 pulgadas cúbicas tiene un diámetro de 10 pulgadas. ¿Cuál es la altura del cilindro?

c Un cono con un volumen de 135π pulgadas cúbicas tiene una altura de 5 pulgadas. ¿Cuál es el radio del cono?

Puedes determinar el volumen de una esfera usando la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radio y la altura son iguales para un cono, un hemisferio y un cilindro, puedes comprender las fórmulas del volumen de cada sólido observando cuánto espacio ocupan unos en relación con los otros.



Volumen del cono	**Volumen del hemisferio**	**Volumen del cilindro**
$\left(\frac{1}{3}\,V \text{ del cilindro}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\,V \text{ del cilindro}\right)$	
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2h$	$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2h$	$V = \pi \cdot r^2h$

El volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro. Dado que el volumen del cono y el hemisferio sumados es igual al volumen del cilindro, el volumen del hemisferio debe ser $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ del volumen del cilindro. Entonces el volumen de una esfera es el doble del volumen de un hemisferio, o $\frac{4}{3}$ del volumen del cilindro.

Prueba a hacer esto

Un cilindro, un cono y una esfera tienen el mismo radio de 6 pulgadas. El cilindro y el cono tienen una altura de 5 pulgadas. Calcula el volumen de cada uno en términos de π.

a ¿Cuál es el volumen del cono?

b ¿Cuál es el volumen del cilindro?

c ¿Cuál es el volumen de la esfera?

Lección 1

a *Las respuestas pueden variar.* La tortuga comenzó a la orilla del mar y caminó, alejándose del agua, durante 20 segundos. A los 20 segundos, la tortuga se encontraba a 6 pies del agua. Allí, retrocedió 3 pies hacia el mar, entre los 20 y 30 segundos. A partir de los 30 segundos, la tortuga comenzó a caminar de nuevo, alejándose del mar.

b A los 40 segundos, la tortuga se encuentra a 6 pies del agua.

c La tortuga está a 3 pies del agua a los 10 segundos y a los 30 segundos.

Lección 2

a Sí. *Las explicaciones pueden variar.* La regla A es una función porque cada persona pudo haber nacido en solo un mes. Así que cada entrada solo tiene una salida posible.

b No. *Las explicaciones pueden variar.* La regla B no es una función porque muchas personas nacen en el mismo mes. Así que cada entrada tiene muchas salidas posibles.

Lección 3

Gráfica B. *Las explicaciones pueden variar.* La gráfica B representa una función porque cada valor de tiempo corresponde a sola una distancia. La gráfica A no representa una función porque hay algunas distancias que se asignan a más de un valor de tiempo. Por ejemplo, Arianna está a 0 metros de la línea de salida tanto a los 0 segundos como aproximadamente a los 75 segundos.

Lección 4

Pregunta o ecuación	Variable independiente	Variable dependiente
¿Cuántos sándwiches puedo hacer?	Número de rebanadas de pan	Número de sándwiches
¿Cuánto cuesta mi helado si pido distintas cantidades de coberturas?	Cantidad de coberturas	Costo de mi cono de helado
¿Cómo influyen las horas de sueño en el desempeño en los exámenes?	Cantidad de horas de sueño	Desempeño en los exámenes
$y = 3x + 5$	x	y

Lección 5

a *Las respuestas pueden variar.* A mediodía, la temperatura ronda los 50 °F y va subiendo. La temperatura llega hasta aproximadamente los 59 °F. Entre las 5:30 p.m. y las 6 p.m., la temperatura comienza a bajar. A medianoche, la temperatura ronda los 52.5 °F.

b A las 9 p.m., la temperatura ronda los 55.5 °F. Es más cálida que la temperatura a las 3 p.m., que ronda los 54.5 °F.

Lección 6

Las respuestas pueden variar. Lleno una bañera con 24 galones de agua en 6 minutos. Esto puede representarse con un modelo lineal creciente. Baño a mi perro en la bañera durante 12 minutos y luego quito el tapón de la bañera, que tarda 12 minutos en vaciarse. Esto puede representarse con un modelo lineal decreciente.

Lección 7

a Abdul empieza con más dinero en su cuenta bancaria. Según la tabla, la cuenta de Abdul tiene $65 en la semana 0. Según la ecuación, la cuenta de Shanice tiene $60 en la semana 0.

b Shanice está ahorrando dinero más rápidamente. Según la ecuación, la cuenta de Shanice suma $9 cada semana. Según la tabla, la cuenta de Abdul suma $10 cada dos semanas o $5 cada semana.

Lección 8

a B. Una planta crece lo mismo cada semana.

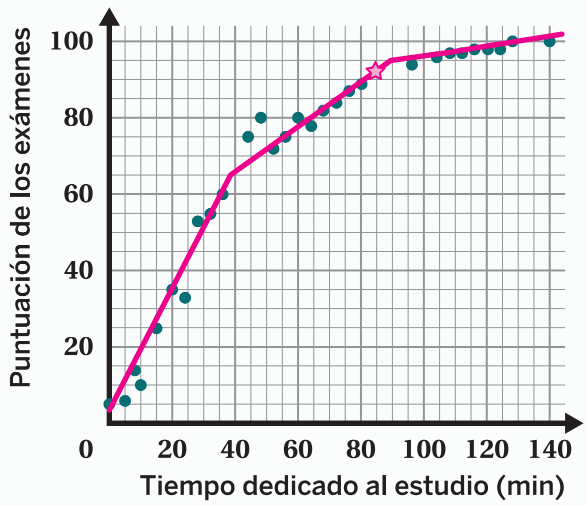
E. Marco está llenando una botella con agua en la fuente.

b *Las respuestas pueden variar.*
B: La altura de una planta puede no aumentar exactamente a la misma tasa durante toda su vida.

E: El agua de la fuente puede fluctuar o fluir más lentamente cuando comienza a salir.

Lección 9

a



b Aproximadamente 92

Lección 10

Las respuestas pueden variar.

- El volumen de la lata equivale a 3 veces el volumen del cono.
- El volumen del cono equivale a $\frac{1}{3}$ del volumen de la lata.
- La lata de sopa es un cilindro y el cono de helado es, en efecto, un cono. La relación entre el volumen de un cilindro es 3 veces el volumen de un cono de igual diámetro.

Lección 11

a $9\pi\ cm^2$

Nota para cuidadores: La base del cilindro es un círculo. El área del círculo es $\pi \cdot r^2$. Este círculo tiene un diámetro de 6, por lo tanto el radio es 3. $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

b $45\pi\ cm^3$.

Nota para cuidadores: El volumen del cilindro es el área de la base multiplicada por la altura. El área de la base es $9\pi\ cm^2$. La altura es $5\ cm$. $9\pi\ cm^2 \cdot 5 = 45\pi\ cm^3$.

Lección 12

a Sí. *Las explicaciones pueden variar.* La relación entre la altura y el volumen de un cilindro es lineal, por lo que si multiplicamos la altura por un factor de escala, el volumen cambiará de acuerdo con ese mismo factor.

b No. *Las explicaciones pueden variar.* La relación entre el radio y el volumen de un cilindro no es lineal, por lo que si multiplicamos el radio por un factor de escala, el volumen no cambiará de acuerdo con el mismo factor de escala.

Lección 13

21π unidades cúbicas.

Nota para cuidadores: El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$*. El radio es* 3 *y la altura es* 7*, por lo tanto* $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 21\pi$ *unidades cúbicas.*

Lección 14

a) 5 centímetros

b) Aproximadamente 5.2 pulgadas

c) 9 pulgadas

Lección 15

a) 60π pulgadas cúbicas

b) 180π pulgadas cúbicas

c) 288π pulgadas cúbicas