Unidad 4

Ecuaciones lineales y sistemas lineales

Las ecuaciones pueden ayudarte a entender y resolver problemas. Hasta ahora, has resuelto ecuaciones con una sola variable en las que la variable se encuentra en uno de los lados. En esta unidad, resolverás ecuaciones con variables en ambos lados. También resolverás dos ecuaciones lineales en un sistema y determinarás cuántas soluciones hay.

Preguntas esenciales

- ¿Cómo se puede resolver una ecuación cuando las variables están en ambos lados del signo igual?
- ¿Cómo se pueden utilizar los sistemas de ecuaciones para representar situaciones y resolver problemas?
- ¿Qué significa que una ecuación o un sistema de ecuaciones *no* tenga solución, tenga *una* solución o tenga un *número infinito* de soluciones?

Resumen | Lección 1

Puedes usar una máquina de números para realizar una serie de operaciones sobre un número.

- Si solo se proporciona la *entrada* (el número introducido en la máquina), la *salida* (el número que sale de la máquina) se puede determinar realizando la serie de operaciones en orden.
- Si solo se proporciona la salida, la entrada se puede determinar adivinando y verificando, trabajando a la inversa o escribiendo y resolviendo una ecuación.

Por ejemplo, una máquina de números toma una entrada y realiza estos pasos en orden:

- Multiplica por 3
- Suma 8
- Resta 1

La salida es 19. Estas son dos formas de determinar la entrada:

Trabajar a la inversa desde la salida

Comienza con 19, suma 1, resta 8 y luego divide entre 3. $(19 + 1 - 8) \div 3 = 4$.

Estos pasos muestran que la entrada es 4.

Escribir y resolver una ecuación

La ecuación $(3x + 8) - 1 = 19$ representa la máquina de números, donde x es la entrada.

Resolver esta ecuación muestra que $x = 4$.

Prueba a hacer esto

Una máquina de números toma una entrada y realiza esta serie de operaciones en orden:

- Multiplica por 2.
- Suma 4.

La salida es 18. ¿Cuál fue la entrada?

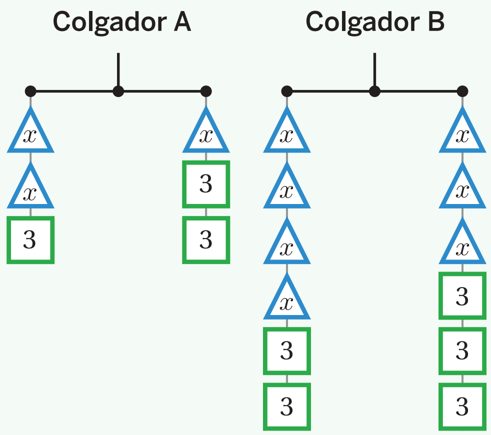
Resumen | Lección 2

Un diagrama de colgador está en equilibrio cuando sus lados izquierdo y derecho tienen el mismo peso. Agregar o quitar elementos de igual peso de cada lado de un diagrama de colgador lo mantiene en equilibrio. Los diagramas de colgador pueden representar ecuaciones.

Por ejemplo, los colgadores A y B representan **ecuaciones equivalentes**, que son ecuaciones que tienen la misma solución.

Estas ecuaciones son equivalentes porque si sumas $2x$ y 3 a cada lado del colgador A, se forma elcolgador B que también está en equilibrio.

La solución de cada ecuación es $x = 3$, que es el peso de cada triángulo en ambos colgadores.

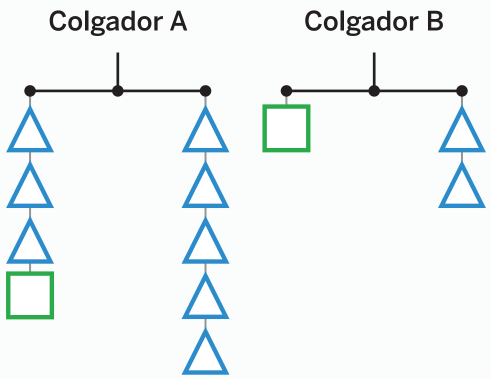


$2x + 3 = x + 6$ $\quad$ $4x + 6 = 3x + 9$

Prueba a hacer esto

Los colgadores A y B están en equilibrio. Cada cuadrado pesa 5 libras.

El colgador A se puede representar con la ecuación $3x + 5 = 5x$.



$3x + 5 = 5x$

a Escribe una ecuación equivalente que represente el colgador B.

b Determina el peso del triángulo.

Resumen | Lección 3

Puedes utilizar diagramas de colgador para visualizar y representar ecuaciones. Los diagramas de colgador pueden ayudarte a ver que los movimientos que mantienen un colgador en equilibrio forman *ecuaciones equivalentes*, por ejemplo:

- Sumar o restar el mismo término a cada lado de una ecuación.
- Multiplicar o dividir las expresiones de cada lado de una ecuación por el mismo número.

Puedes usar estos movimientos para resolver ecuaciones con una variable desconocida. Aquí tienes un ejemplo de cómo usar movimientos de equilibrio para resolver una ecuación:

Paso de resolución	Operación de equilibrio
$\begin{aligned} 4x + 9 &= -2x - 3 \\ -9 \quad & \quad\;\; -9 \end{aligned}$	Restar 9 a ambos lados.
$\begin{aligned} 4x &= -2x - 12 \\ +2x & \quad +2x \end{aligned}$	Sumar $2x$ a ambos lados.
$\frac{6x}{6} = \frac{-12}{6}$ $x = -2$	Dividir ambos lados por 6.

Puedes verificar si un valor es una *solución* de una ecuación introduciéndolo en lugar de la variable de la ecuación original. Si hace que la ecuación sea verdadera, entonces la solución es correcta.

$$\begin{aligned} 4(-2) + 9 &= -2(-2) - 3 \\ -8 + 9 &= 4 - 3 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Prueba a hacer esto

a Estos son los pasos para resolver una ecuación. Relaciona cada paso con una descripción de cómo mantiene la ecuación en equilibrio.

Pasos de resolución

Paso 1:

$4x + 9 = -2x - 3$

$4x = -2x - 12$

Paso 2:

$4x = -2x - 12$

$6x = -12$

Paso 3:

$6x = -12$

$x = -2$

Descripciones

Paso ______: Suma $2x$ a ambos lados.

Paso ______: Resta 9 a ambos lados.

Paso ______: Divide ambos lados por 6.

b ¿Cómo puedes verificar si -2 es una solución de la ecuación?

Resumen | Lección 4

Hay muchas formas de resolver una ecuación utilizando operaciones de equilibrio. En general, tus pasos deben acercarte a una ecuación equivalente en la que la variable esté aislada, es decir, $x = 5$, o $10 = y$. Estos son algunos ejemplos de operaciones que pueden ser útiles para resolver una ecuación.

Aplicar la *propiedad distributiva*	Combinar términos *semejantes* en un lado de la ecuación	Sumar o restar el mismo término a ambos lados	Multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por el mismo valor
$2x + 4 = 3(2x + 4)$ $2x + 4 = 6x + 12$	$-10x + 3x = 15$ $-7x = 15$	$-x - 8 = 4x + 7$ $-8 = 5x + 7$	$-15x = 5(2x + 4)$ $-3x = 2x + 4$

Prueba a hacer esto

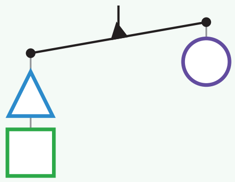
Resuelve la ecuación $2x = -3(x + 5)$. Muestra tu razonamiento.

Puedes usar diferentes pasos para resolver la misma ecuación. Por ejemplo, aquí hay dos formas de resolver la ecuación $\frac{1}{3}(3x+9)=6x+18$:

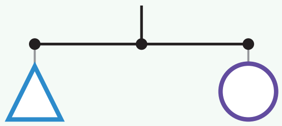
Comenzar multiplicando $\frac{1}{3}$ por $(3x+9)$	**Comenzar multiplicando ambos lados de la ecuación por 3**
$\frac{1}{3}(3x+9)=6x+18$ $x+3=6x+18$ $-5x+3=18$ $-5x=15$ $x=-3$	$\frac{1}{3}(3x+9)=6x+18$ $3x+9=18x+54$ $3x-45=18x$ $-45=15x$ $-3=x$

Sin querer, a veces se hacen operaciones que desequilibran una ecuación. Estos son algunos ejemplos:

Operación que desequilibra la ecuación



Operación que equilibra la ecuación



	Operación que desequilibra la ecuación	Operación que equilibra la ecuación
Multiplicar un factor solo por algunos términos en lugar de todos los términos entre paréntesis	$\frac{1}{3}(3x+9)=5x$ $x+9\neq 5x$	$\frac{1}{3}(3x+9)=5x$ $x+3=5x$
Multiplicar solo algunos términos en lugar de todos los términos de una ecuación por un factor	$\frac{1}{5}(x+2)=4x+6$ $x+2\neq 20x+6$	$\frac{1}{5}(x+2)=4x+6$ $x+2=20x+30$
Sumar o restar un término antes de multiplicarlo por los términos en un paréntesis	$7-4(x+1)=2x+5$ $3(x+1)\neq 2x+5$	$7-4(x+1)=2x+5$ $7-4x+4=2x+5$

Prueba a hacer esto

a ¿Cuál es un posible primer paso que podrías realizar para resolver esta ecuación?
$9-2b+6=-3(b+5)+4b$

b ¿Qué otro posible primer paso podrías realizar para resolver esta ecuación?
$9-2b+6=-3(b+5)+4b$

c ¿Este movimiento mantiene la ecuación en equilibrio? Explica tu razonamiento.
$9-2b+6=-3(b+5)+4b$
$9+6=-3(b+5)+6b$

Las ecuaciones pueden no tener soluciones, o tener una solución o **infinitas soluciones**.

Estos son algunos ejemplos.

Una solución

$$3x + 8 = 6 + 2 - 3x$$

Esta ecuación solo es verdadera cuando $x = 0$.

Una ecuación lineal tiene *una solución* cuando solo un valor de la variable hace que las expresiones en ambos lados de la ecuación sean iguales.

Ninguna solución

$$3(x + 4) = 3x + 7$$

Esta ecuación nunca es verdadera, independientemente del valor de x.

Una ecuación lineal no tiene *solución* cuando no hay ningún valor de la variable que haga que las expresiones en ambos lados de la ecuación sean iguales.

Infinitas soluciones

$$10 - 3x = 8 - 3x + 2$$

Esta ecuación siempre es verdadera con cualquier valor de x.

Una ecuación lineal tiene *infinitas soluciones* cuando las expresiones en ambos lados de la ecuación son *equivalentes*: siempre son iguales, independientemente del valor de la variable.

Prueba a hacer esto

Determina si cada ecuación tiene una solución, infinitas soluciones o no tiene solución.

$2x = x + x$	$3x = x + 2$	$7 + x = x + 7$
$x = x + 1$	$-x = 1 - x$	$9x = 10$

Una solución	Ninguna solución	Infinitas soluciones

Resumen | Lección 7

Las ecuaciones pueden tener muchas características diferentes, entre ellas, fracciones, decimales, valores negativos, símbolos de agrupación y múltiples términos. Según las características, puede ser útil analizar qué pasos serían más eficaces para resolver la ecuación.

Al resolver una ecuación con una única solución, el objetivo es despejar la variable en un lado y tener su valor en el otro. Pero esto no sucede cuando no hay solución o cuando hay infinitas soluciones.

Una solución

$$3x + 8 = 6 + 2 - 3x$$
$$3x + 8 = 8 - 3x$$
$$6x + 8 = 8$$
$$6x = 0$$
$$x = 0$$

Esta ecuación solo es verdadera cuando $x = 0$.

Ninguna solución

$$3(x + 4) = 3x + 7$$
$$3x + 12 = 3x + 7$$
$$12 = 7$$

Esta ecuación no es verdadera con ningún valor de x.

Infinitas soluciones

$$10 - 3x = 8 - 3x + 2$$
$$10 - 3x = 10 - 3x$$
$$10 = 10$$

Esta ecuación siempre es verdadera con cualquiera sea el valor de x.

Prueba a hacer esto

Resuelve la ecuación. Muestra tu razonamiento.

$3x - 7x + 5 = 3(x - 10)$

Resumen | Lección 8

Podemos escribir dos expresiones con una variable e igualarlas para representar un caso donde las dos condiciones son iguales y luego resolver esa ecuación para determinar la cantidad desconocida.

Por ejemplo, imaginemos a dos excursionistas que caminan en la misma dirección por un sendero llano. Los excursionistas se encontrarán cuando estén en la misma ubicación del sendero, al mismo tiempo.

Para determinar cuándo ocurrirá esto, se puede usar una expresión que represente la ubicación y la velocidad de desplazamiento de cada excursionista.

	Posición (ft)	Velocidad de desplazamiento (ft/s)	Expresión
Excursionista 1	30	4	$30 + 4t$
Excursionista 2	10	7	$10 + 7t$

Puedes igualar estas dos expresiones para formar una ecuación que pueda resolverse.

$$30 + 4t = 10 + 7t$$

$$20 = 3t$$

$t = \frac{20}{3}$ o alrededor de 6.7 segundos

Prueba a hacer esto

Un automóvil se desplaza a una velocidad constante de 16 metros por segundo. Una motoneta se desplaza a 9 metros por segundo y está 42 metros delante del automóvil.

Esta situación se puede representar mediante la ecuación $16t = 9t + 42$, donde t representa el número de segundos que se han desplazado los vehículos.

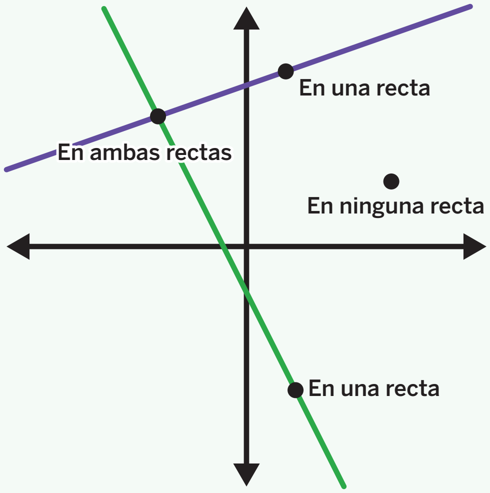
a Resuelve esta ecuación. Muestra tu razonamiento.

b ¿Qué representa la solución en esta situación?

Resumen | Lección 9

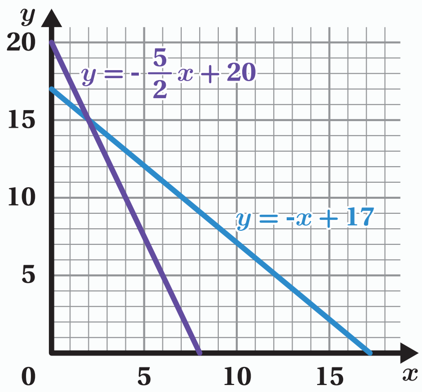
Las relaciones lineales pueden representar muchas situaciones. Las rectas trazadas en el mismo plano de coordenadas pueden representar simultáneamente múltiples condiciones o relaciones en las que intervienen las mismas variables.

- Las coordenadas de un punto que está en ambas rectas hacen que las dos relaciones sean verdaderas.
- Las coordenadas de un punto que está en una sola recta hacen que solo una relación sea verdadera.
- Las coordenadas de un punto que no está en ninguna de las rectas hacen que ninguna relación sea verdadera.



Prueba a hacer esto

Esta gráfica representa dos relaciones.



a ¿Qué combinación de valores hace que ambas relaciones sean verdaderas?

$x =$ ________ $y =$ ________

b ¿Qué combinación de valores hace que *una* relación sea verdadera, pero no la otra?

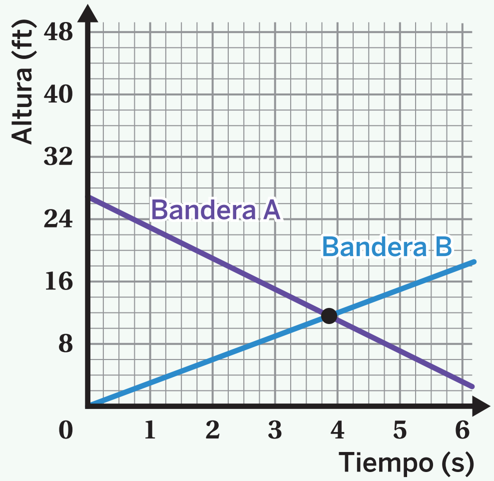
$x =$ ________ $y =$ ________

Resumen | Lección 10

Si hay dos ecuaciones que comparten las mismas variables, puedes hallar la solución que hace que ambas sean verdaderas ubicando el punto donde se cruzan en una gráfica, conocido como **punto de intersección**.

Por ejemplo, considera esta gráfica.

Aunque no se pueden ver los valores exactos del punto de intersección, se puede decir que las banderas están a la misma altura, aproximadamente a unos 11.5 pies, justo antes de los 4 segundos.



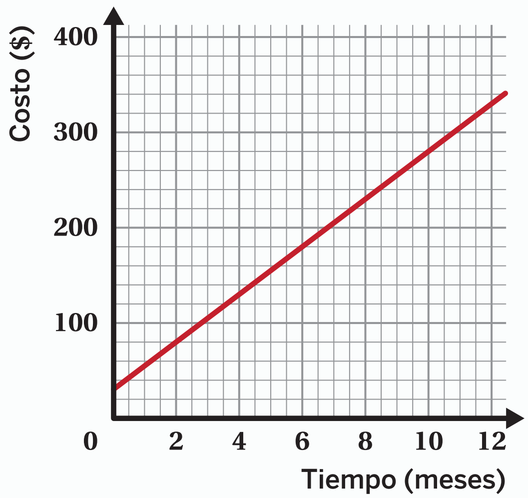
Prueba a hacer esto

Unirse al gimnasio A tiene un costo de $30, con una tarifa mensual de $25. Unirse al gimnasio B tiene un costo de $100, con una tarifa mensual de $15.

La gráfica muestra el costo del gimnasio A a lo largo del tiempo.

a Traza una recta que represente el costo del gimnasio B con respecto al tiempo.

b Explica qué representa el punto de intersección en esta situación.



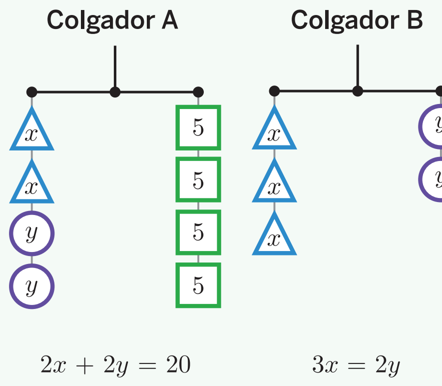
Resumen | Lección 11

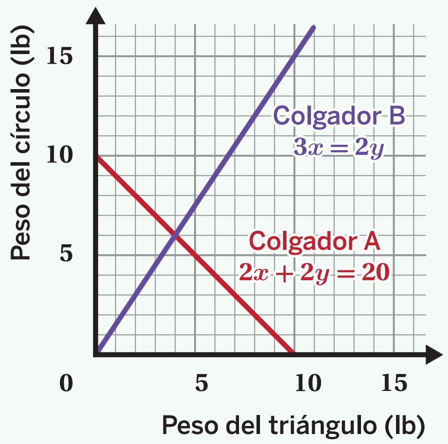
Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones con las mismas variables que deben resolverse juntas. Suele mostrarse con un corchete alrededor de las ecuaciones.

Una **solución de un sistema** de ecuaciones es un conjunto de valores que hace que todas las ecuaciones de ese sistema sean verdaderas.

Por ejemplo, este es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 3x = 2y \end{cases}$$





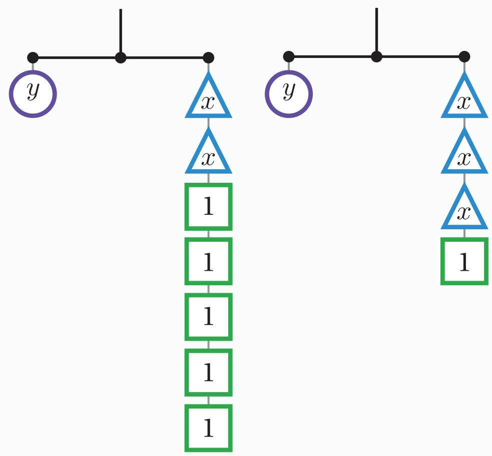
El par ordenado $(4, 6)$ es el punto de intersección, lo que significa que hace que ambas ecuaciones sean verdaderas. Ambos colgadores estarán en equilibrio cuando los triángulos pesen 4 libras y los círculos pesen 6 libras.

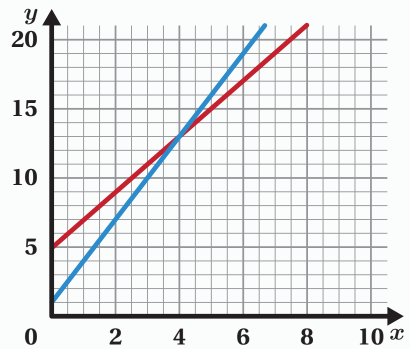
Prueba a hacer esto

Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$y = 2x + 5$

$y = 3x + 1$





Resumen | Lección 12

Para que un punto sea una solución de un sistema de ecuaciones, las coordenadas de x y de y deben hacer que ambas ecuaciones sean verdaderas. Este par ordenado representa el *punto de intersección* al graficar el sistema.

Por ejemplo, este es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = \text{-}2x + 7 \end{cases}$$

Para determinar la solución del sistema, puedes escribir una sola ecuación, igualando las dos expresiones que equivalen a y.

$$4x - 5 = \text{-}2x + 7$$
$$6x - 5 = 7$$
$$6x = 12$$
$$x = 2$$

Luego, introduces el valor de x en lugar de la variable en cualquiera de las ecuaciones originales para determinar el valor de y.

$$y = 4x - 5$$
$$y = 4(2) - 5$$
$$y = 8 - 5$$
$$y = 3$$

La solución de este sistema de ecuaciones es el punto $(2, 3)$.

Prueba a hacer esto

¿Cuál es la solución de este sistema de ecuaciones?

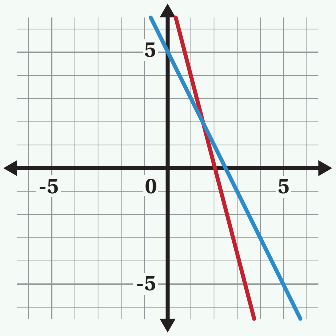
$y = 2x + 6$

$y = \text{-}3x - 4$

Resumen | Lección 13

Los sistemas de dos ecuaciones lineales pueden tener una solución, infinitas soluciones o no tener solución. Puedes determinar la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones graficando, comparando las pendientes y puntos de intersección con el eje y, o resolviendo el sistema de forma algebraica.

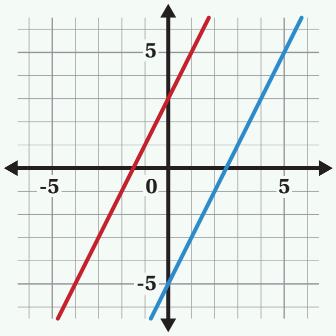
Una solución:



$$\begin{cases} y = \text{-}4x + 8 \\ y = \text{-}2x + 5 \end{cases}$$

- Diferentes pendientes

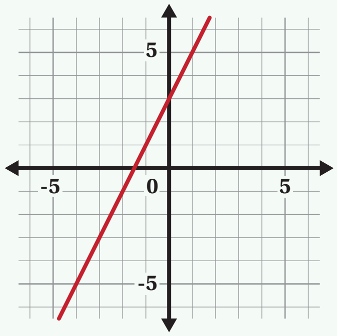
Ninguna solución:



$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

- Mismas pendientes
- Diferentes intersecciones con el eje y

Infinitas soluciones:



$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

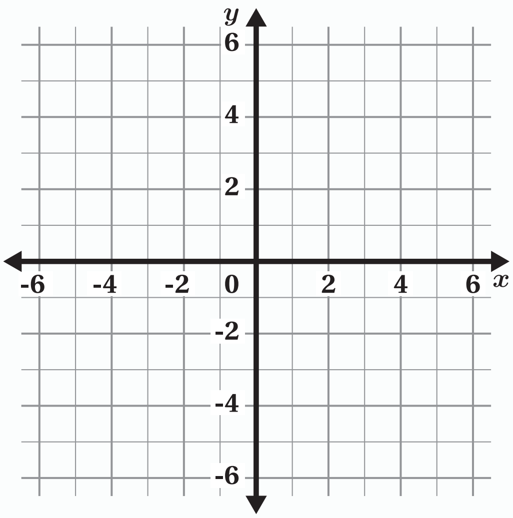
- Mismas pendientes
- Mismas intersecciones con el eje y

Prueba a hacer esto

Determina si cada sistema de ecuaciones tendrá una solución, infinitas soluciones o no tendrá solución. Usa la gráfica si te ayuda con tu razonamiento. Muestra o explica tu razonamiento.

a $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x + 3 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = 1.5x \text{ -}2 \\ y = 1.5x - 2 \end{cases}$



Un par ordenado (x, y) es una solución de un sistema de ecuaciones si hace que ambas sean verdaderas. Si conoces el valor de una variable en una de las ecuaciones, puedes introducirlo en la otra para determinar el valor de la segunda variable.

Este es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 5x \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

Dado que $y = 5x$, puedes introducir $5x$ en lugar de y en $2x - y = 9$ y luego despejar x.

$$\begin{aligned} 2x - (5x) &= 9 \\ \text{-}3x &= 9 \\ x &= \text{-}3 \end{aligned}$$

A continuación, puedes introducir la solución de x en cualquiera de las ecuaciones originales para determinar el valor de y.

$$\begin{aligned} y &= 5x \\ y &= 5(\text{-}3) \\ y &= \text{-}15 \end{aligned}$$

El par ordenado (-3, -15) es la solución del sistema de ecuaciones.

Prueba a hacer esto

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones. Muestra tu razonamiento.

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = \text{-}3x + 42 \end{cases}$$

Lección 1

7

Nota para cuidadores: Estas son dos estrategias para calcular la respuesta:

Empieza en sentido contrario, partiendo de la salida: Comienza con 18. Resta 4 y luego divide por 2. $(18 - 4) \div 2 = 7$

Escribe y resuelve una ecuación: La ecuación $2x + 4 = 18$ representa la máquina de números, donde x es la entrada. Al resolver esta ecuación, obtenemos $x = 7$.

Lección 2

a. $5 = 2x$

b. **2.5 libras**

Lección 3

a. Paso **2** : Suma $2x$ a ambos lados.

Paso **1** : Resta 9 a ambos lados.

Paso **3** : Divide ambos lados por 6.

b. **Puedes verificar si un valor es una solución de una ecuación introduciéndolo en la ecuación original.**

$4x + 9 = -2x - 3$

$4(-2) + 9 = -2(-2) - 3$

$(-8) + 9 = (4) - 3$

$1 = 1$

Lección 4

$x = -3$. ***Los trabajos pueden variar.***

$2x = -3(x + 5)$

$2x = -3x - 15$

$5x = -15$

$x = -3$

Lección 5

a. *Las respuestas pueden variar.* Un posible primer paso es multiplicar -3 por $(b+5)$:
$9-2b+6=-3(b+5)+4b$
$9-2b+6=-3b-15+4b$

b. *Las respuestas pueden variar.* Otro posible primer paso es combinar los términos semejantes, 9 y 6:
$9-2b+6=-3(b+5)+4b$
$15-2b=-3(b+5)+4b$

c. Sí. *Las explicaciones pueden variar.* Se sumó $2b$ a ambos lados de la ecuación, por lo que la ecuación permanece en equilibrio.

Lección 6

Una solución	Ninguna solución	Infinitas soluciones
$3x=x+2$ $9x=10$	$x=x+1$ $-x=1-x$	$7+x=x+7$ $2x=x+x$

Lección 7

$x=5$. *Los trabajos pueden variar.*

$$3x-7x+5=3(x-10)$$
$$-4x+5=3(x-10)$$
$$-4x+5=3x-30$$
$$5=7x-30$$
$$35=7x$$
$$5=x$$

Lección 8

a. $t=6$. *Los trabajos pueden variar.*

$$16t=9t+42$$
$$7t=42$$
$$t=6$$

b. *Las respuestas pueden variar.* El automóvil alcanzará a la motoneta después de 6 segundos.

Lección 9

a $x = 2$ y $y = 15$

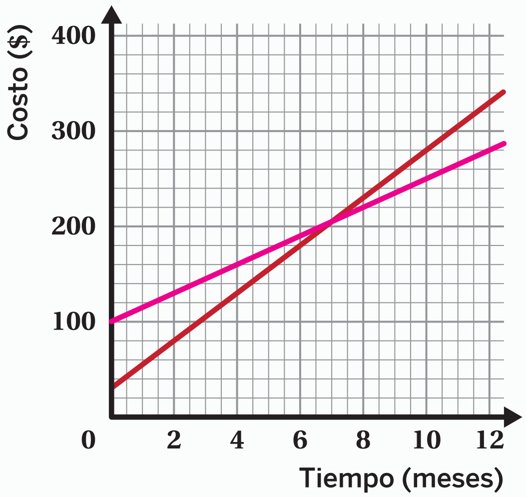
Nota para cuidadores: Una estrategia es buscar un punto que esté en ambas rectas. $(2, 15)$ *es ese punto.*

b *Las respuestas pueden variar.* $x = 6$ y $y = 5$.

Nota para cuidadores: Una estrategia es buscar un punto que esté en solo una de las rectas, como $(6, 5)$.

Lección 10

a



b El punto de intersección representa el mes durante el cual ambos gimnasios tendrán el mismo costo. Después de 7 meses, ambos gimnasios costarán un poco más de $200.

Lección 11

$(4, 13)$

Nota para cuidadores: Una estrategia es identificar el punto de intersección de las rectas, que representa los valores de x *y* y *y hace que ambas ecuaciones sean verdaderas.*

Lección 12

(-2, 2)

Nota para cuidadores: Una estrategia es escribir una sola ecuación, igualando las dos expresiones que equivalen a y.

$2x + 6 = -3x - 4$

$5x + 6 = -4$

$5x = -10$

$x = -2$

Luego se introduce la solución de x en una de las ecuaciones originales:

$y = 2x + 6$

$y = 2(-2) + 6$

$y = -4 + 6$

$y = 2$

La solución de este sistema de ecuaciones es (-2, 2).

Lección 13

a. Ninguna solución. Como estas líneas tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones con el eje y, nunca se cruzarán.

b. Infinitas soluciones. Como son la misma recta, cualquier punto que esté en una recta, estará en ambas rectas.

Lección 14

(7, 21). *Los trabajos pueden variar.* Esta es una estrategia:

Dado que $x = 7$, puedes escribir 7 en lugar de la variable x en $y = -3x + 42$:

$y = -3x + 42$

$y = -3(7) + 42$

$y = -21 + 42$

$y = 21$

El par ordenado (7, 21) es la solución del sistema de ecuaciones.