

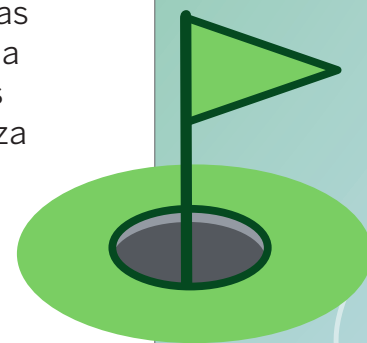
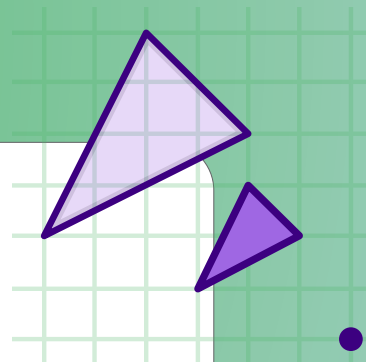
Unidad **2**

Dilataciones, semejanza y pendiente

En la vida cotidiana, utilizamos dilataciones para agrandar o achicar objetos, por ejemplo, al imprimir fotos en distintos tamaños o al ampliar o reducir la pantalla de nuestro teléfono. A diferencia de las transformaciones rígidas, las dilataciones cambian las dimensiones de una figura. Aprenderemos cómo las dilataciones pueden ayudarnos a determinar la semejanza y cómo la semejanza puede ayudarnos a comprender la pendiente.

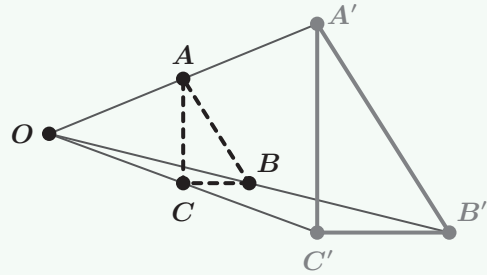
Preguntas esenciales

- ¿Qué significa dilatar una figura?
- ¿Cómo se pueden usar las transformaciones para decidir si dos figuras son semejantes?
- ¿Cómo se pueden usar los triángulos semejantes para determinar la pendiente de una recta?



Una **dilatación** es un tipo de transformación que produce *copias a escala*. Dilatar una figura significa mover cada uno de sus vértices a lo largo de una recta que se extiende a partir de un punto determinado. La distancia original del punto determinado a cada uno de los vértices de la *preimagen* se multiplica por el mismo número para producir la imagen dilatada.

Por ejemplo, el triángulo ABC se dilató a partir del punto O para producir el triángulo $A'B'C'$.



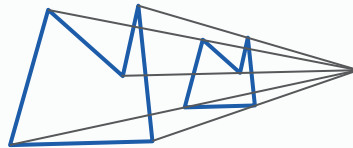
Prueba a hacer esto

¿Cuál de estos es un ejemplo de dilatación? Explica tu razonamiento.

A.



B.

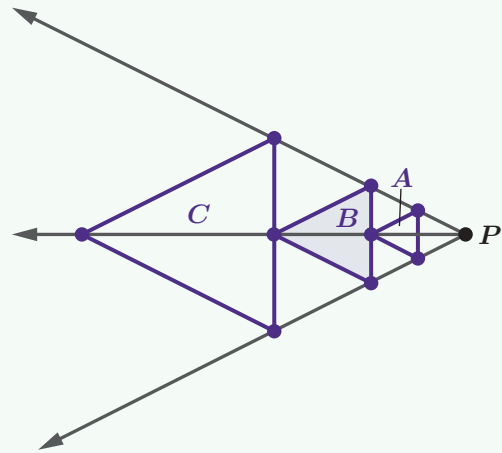


Una *dilatación* es una transformación que incluye un centro de dilatación y un factor de escala.

Una estrategia para dilatar una figura es medir la distancia entre el centro de dilatación y uno de los puntos de la preimagen, luego multiplicar esa distancia por el factor de escala y, finalmente, colocar el punto de la imagen a esa distancia del centro de dilatación en la misma recta. Esta estrategia se repite con los demás puntos de la preimagen.

En este ejemplo, el triángulo B es la preimagen.

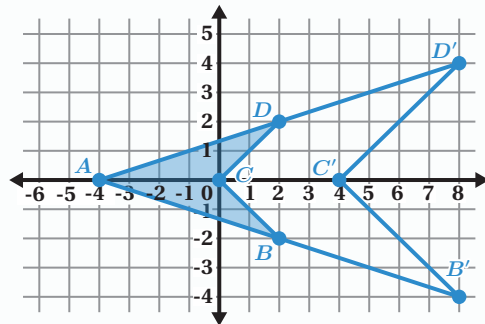
- El triángulo A es una dilatación del triángulo B usando P como centro de dilatación y un factor de escala de $\frac{1}{2}$.
- El triángulo C es una dilatación del triángulo B usando P como centro de dilatación y un factor de escala de 2.



Prueba a hacer esto

La figura $ABCD$ se dilata para crear la figura $A'B'C'D'$.

- ¿Cuál es el centro de dilatación?
- ¿Cuál es el factor de escala?



Las dilataciones pueden combinarse con otras *secuencias de transformaciones*.

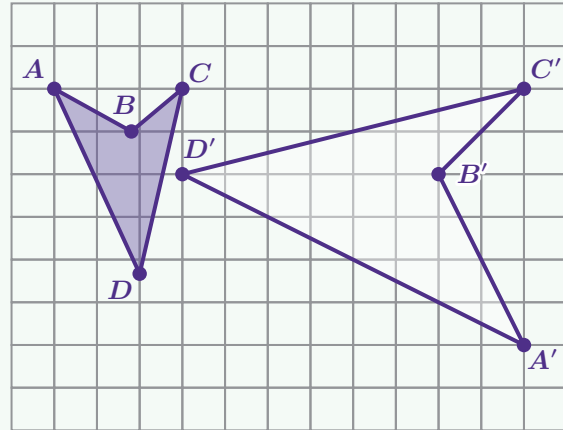
Esta es una secuencia de transformaciones que lleva la figura $ABCD$ a la figura $A'B'C'D'$

Paso 1: Dilatar la figura $ABCD$ usando D como centro de dilatación y un factor de escala de 2.

Paso 2: Trasladar la imagen después del paso 1 para llevar D a D' .

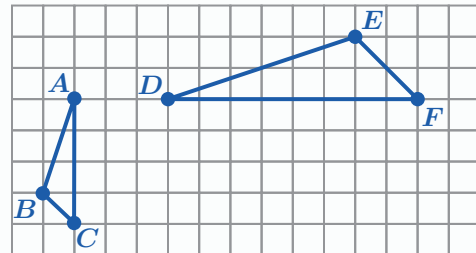
Paso 3: Rotar la nueva imagen 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de D' .

Paso 4: Reflejar la nueva imagen sobre una línea horizontal que pasa por D' y B' .



Prueba a hacer esto

Describe una secuencia de transformaciones que lleve el triángulo ABC al triángulo DEF .



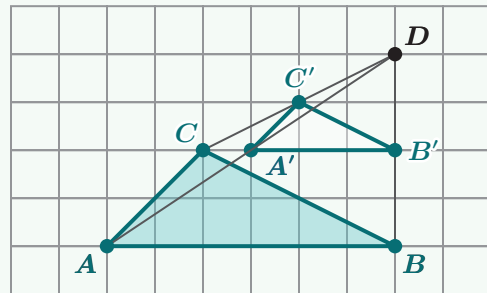
Otra estrategia para dilatar una figura es utilizar una cuadrícula. Cuenta los cuadrados verticales y horizontales de la cuadrícula entre el centro de dilatación y la preimagen, multiplica cada valor por el factor de escala y, luego, cuenta el número resultante de cuadrados de cuadrícula partiendo del centro para obtener la imagen.

Si el factor de escala de la dilatación es:

- Mayor que 1, la imagen es *más grande* que la preimagen y estará más alejada del centro de dilatación.
- Igual a 1, la imagen tendrá *el mismo tamaño* que la preimagen y la distancia al centro será igual.
- Entre 0 y 1, la imagen será *más pequeña* que la preimagen y estará más cerca del centro.

Por ejemplo, el triángulo ABC se dilata usando D como centro de dilatación y un factor de escala de $\frac{1}{2}$.

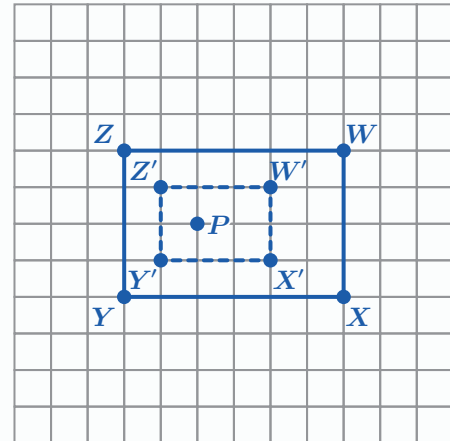
Como el factor de escala es menor que 1, la imagen es más pequeña que la preimagen y está más cerca del centro de dilatación.



Prueba a hacer esto

El rectángulo $WXYZ$ se dilata con el punto P como centro de dilatación para crear el rectángulo $W'X'Y'Z'$.

¿Es el factor de escala mayor que 1, igual a 1, o está entre 0 y 1? Explica tu razonamiento.

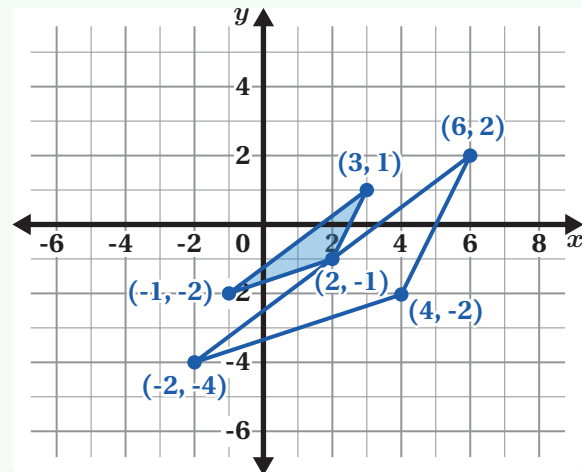


Las coordenadas permiten realizar dilataciones con precisión.

Supongamos que vas a dilatar esta preimagen coloreada utilizando el centro de dilatación $(0, 0)$ y un factor de escala de 2.

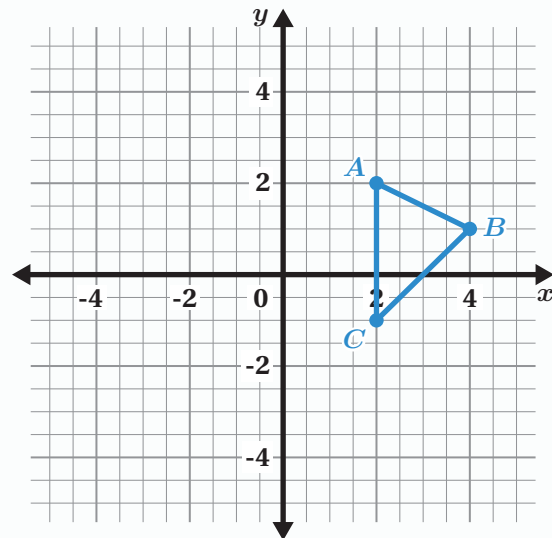
Puedes utilizar el plano de coordenadas para medir las distancias horizontal y vertical de cada punto partiendo del centro de dilatación. Luego, puedes multiplicar esas distancias por el factor de escala para obtener las distancias entre el centro de dilatación y los puntos de la imagen.

En este ejemplo, el centro de dilatación es $(0, 0)$, por lo que tienes que multiplicar las coordenadas de la preimagen por el factor de escala para obtener las coordenadas de la imagen.



Prueba a hacer esto

Dilata el triángulo ABC usando el punto $(-4, 0)$ como centro de dilatación y un factor de escala de $\frac{1}{2}$.



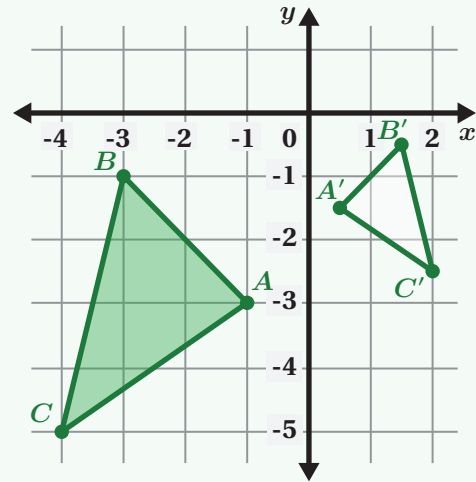
Dos figuras son *congruentes* si se puede usar una secuencia de transformaciones rígidas para mover una figura y hacerla coincidir exactamente con la otra. Dos figuras son semejantes si se puede usar una secuencia de dilataciones y transformaciones rígidas para mover una figura y hacerla coincidir exactamente con la otra.

Utilizamos el símbolo $\sim$ para decir que dos figuras son semejantes. Por ejemplo, el triángulo $ABC \sim$ el triángulo $A'B'C'$.

En las figuras congruentes, los ángulos *correspondientes* y los lados correspondientes son congruentes.

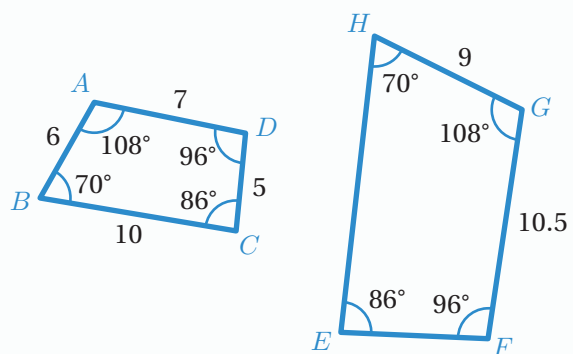
En las figuras semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de lado correspondientes son proporcionales, pero *no* siempre son congruentes.

Por ejemplo, $\angle A$ es congruente con $\angle A'$, pero el segmento AB no tiene la misma longitud que el segmento $A'B'$. La longitud del segmento $A'B'$ es el doble que la del segmento AB porque el factor de escala del triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$ es 2.



Prueba a hacer esto

¿Es la figura $ABCD$ semejante a la figura $GHEF$? Explica tu razonamiento.



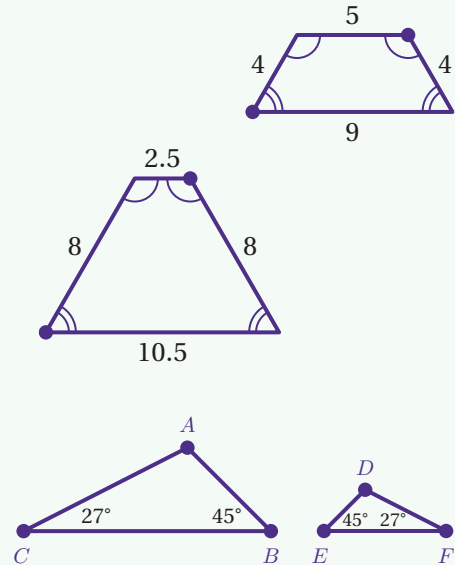
Las figuras semejantes tienen ángulos correspondientes congruentes. ¿Saber que los ángulos correspondientes de dos figuras son congruentes basta para demostrar que las figuras también son semejantes? Depende.

Estas son dos figuras que tienen ángulos correspondientes congruentes, pero no son figuras semejantes.

En el caso de los triángulos, basta con saber que los ángulos correspondientes son congruentes para saber que los triángulos son semejantes.

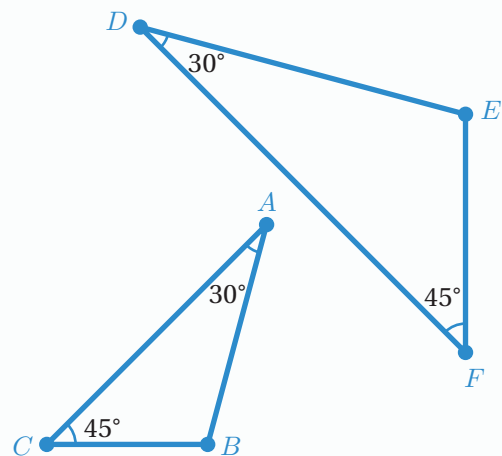
Esto es verdadero aún cuando solo se conocen las medidas de dos ángulos porque podemos utilizar el hecho de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° para determinar la medida del tercer ángulo.

Por ejemplo, los ángulos desconocidos de los triángulos CAB y FDE miden 108° cada uno. Todos los ángulos correspondientes son congruentes, lo que significa que el triángulo CAB es semejante al triángulo FDE .



Prueba a hacer esto

¿Es el triángulo ABC semejante al triángulo DEF ?
Explica tu razonamiento.

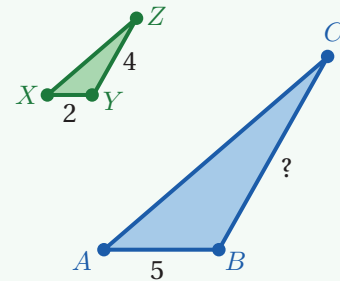


Existen varias estrategias para determinar longitudes de lado desconocidas en triángulos semejantes.

Puedes utilizar razones que comparen dos triángulos utilizando el factor de escala entre ambos.

También puedes determinar la razón de dos longitudes de lado de uno de los triángulos y luego aplicar esa razón a los lados correspondientes en el triángulo semejante.

Aquí tienes dos triángulos semejantes, el triángulo ABC y el triángulo XYZ . Puedes usar cada una de estas estrategias para determinar la longitud del lado BC .



Usar el factor de escala entre los triángulos.

El lado XY y el lado AB son lados correspondientes. La razón de sus longitudes de lado es $\frac{5}{2}$, lo que quiere decir que el factor de escala es 2.5. Para calcular la longitud del lado BC , puedes multiplicar la longitud del lado YZ por el factor de escala.

$4 \cdot 2.5 = 10$, por lo tanto, el lado BC mide 10 unidades.

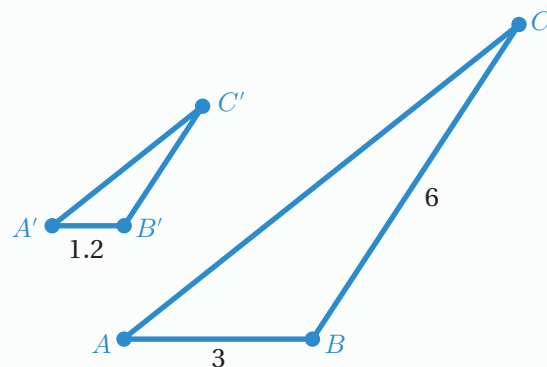
Usar las razones de las longitudes de lado de un triángulo.

La razón del lado YZ al lado XY es $4 : 2$, o 2. Esto significa que la longitud del lado BC es el doble de la longitud del lado AB . $5 \cdot 2 = 10$, por lo tanto, el lado BC mide 10 unidades.

Prueba a hacer esto

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Determina la longitud del lado $B'C'$.

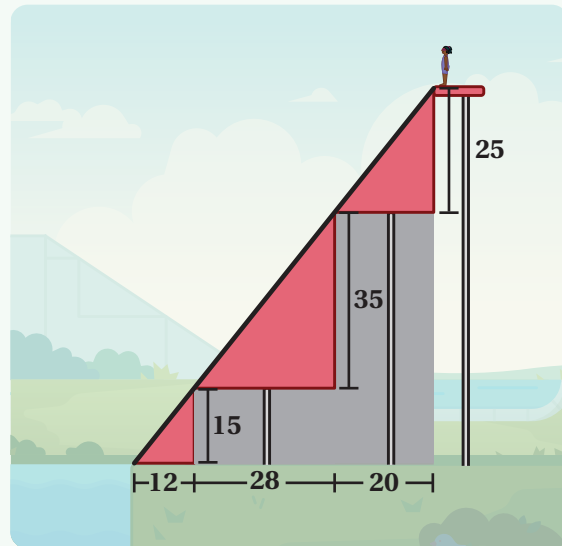


Aquí hay tres rampas formadas por triángulos semejantes con longitudes de lado correspondientes proporcionales. Por este motivo, se alinean perfectamente para crear un tobogán parejo.

Para alinear el lado más largo de cada triángulo, la **pendiente** de cada triángulo debe ser la misma. La pendiente es la *razón* de la altura a base de un triángulo, que describe la inclinación de su lado más largo.

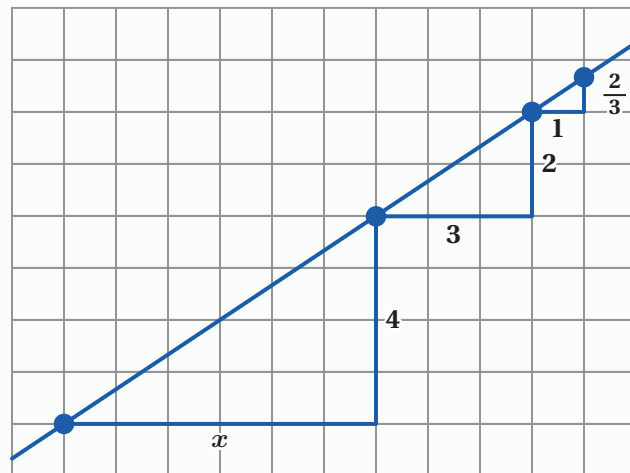
Por ejemplo, la pendiente de este tobogán es $\frac{5}{4}$ porque $\frac{15}{12} = \frac{35}{28} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$.

Sobre esa recta, se podría dibujar una cantidad infinita de triángulos con la misma razón de la altura a la base. Cualquiera de esos triángulos puede utilizarse para determinar la pendiente.



Prueba a hacer esto

¿Cuál es el valor de x ? Explica tu razonamiento.

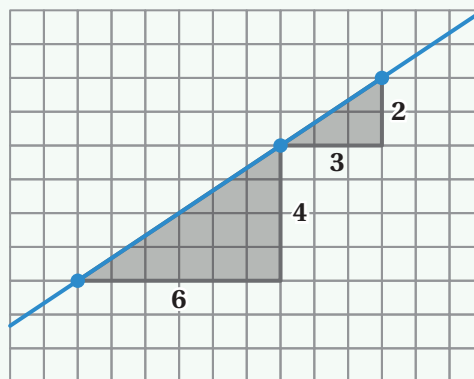


Puedes determinar la pendiente de una recta dibujando triángulos rectángulos semejantes, llamados **triángulos de pendiente**, entre dos puntos cualesquiera de la recta. La altura del triángulo de pendiente representa la distancia vertical entre los puntos, mientras que la base del triángulo representa la distancia horizontal entre los puntos.

La pendiente es la razón de la altura de un triángulo de pendiente a su base.

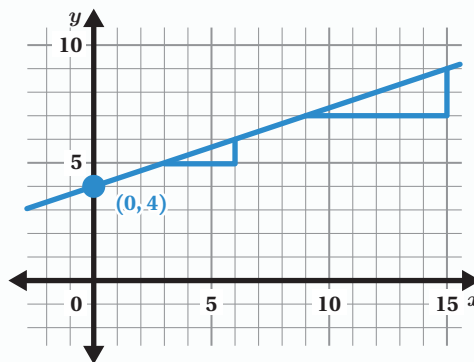
Aquí tienes un ejemplo de dos posibles triángulos de pendiente que podrías utilizar para calcular la pendiente de esta recta.

La pendiente de esta recta es $\frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$, o cualquier valor equivalente.



Prueba a hacer esto

Determina la pendiente de esta recta.



Lección 1

B. *Las explicaciones pueden variar.* La opción B es una dilatación porque los vértices se extienden desde un punto, lo que da como resultado copias a escala. Las figuras de la opción A no son copias a escala porque las longitudes de lado no tienen la misma razón.

Lección 2

a Punto A.

Nota para cuidadores: El centro de dilatación es el punto A porque pueden determinarse los puntos de la figura $A'B'C'D'$ dibujando una línea recta desde el punto A.

b 2

Nota para cuidadores: El factor de escala es 2, ya que los puntos de la figura $A'B'C'D'$ están dos veces más lejos de A que los puntos de la figura ABCD. Por ejemplo, el punto C está a 4 unidades del punto A, mientras que el punto C' está a 8 unidades del punto A.

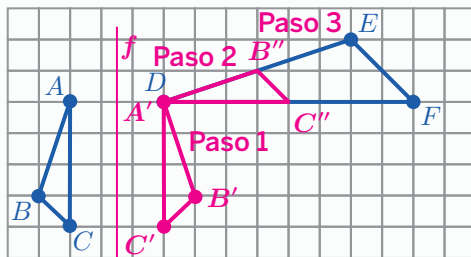
Lección 3

Las respuestas pueden variar.

Paso 1: Reflejar el triángulo ABC sobre una línea vertical que se encuentra directamente entre los triángulos ABC y DEF.

Paso 2: Rotar el triángulo $A'B'C'$ 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto A'.

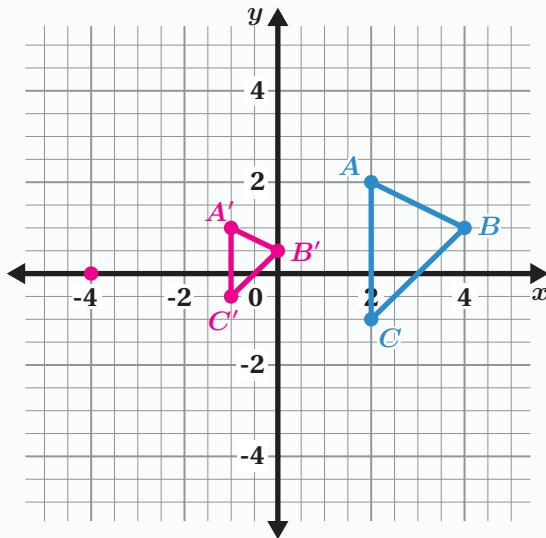
Paso 3: Dilatar el triángulo $A'B''C''$ usando el punto A' como centro de dilatación y un factor de escala de 2.



Lección 4

El factor de escala está entre 0 y 1 porque la imagen es más pequeña que la preimagen y está más cerca del centro de dilatación.

Lección 5



Lección 6

Sí, las figuras son semejantes. Las explicaciones pueden variar. Los ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de lado correspondientes son proporcionales. Por ejemplo, $\angle ADC$ y $\angle GFE$ son ángulos correspondientes y ambos miden 96° . Los lados AB y GH son lados correspondientes con una razón de $6 : 9$ o $\frac{2}{3}$. Los lados AD y GF también son lados correspondientes con una razón de $\frac{7}{10.5} = \frac{2}{3}$.

Lección 7

Sí, los triángulos ABC y DEF son semejantes. Las explicaciones pueden variar. Dado que dos ángulos de cada triángulo miden 45° y 30° , el tercer ángulo debe ser 105° porque $180 - 45 - 30 = 105$. Cuando dos triángulos tienen tres ángulos congruentes, son triángulos semejantes.

Lección 8

$B'C' = 2.4$ unidades.

Nota para cuidadores: La razón del lado AB a BC es $1 : 2$ o $\frac{1}{2}$. Eso significa que el lado BC es el doble de la longitud del lado AB , por lo que lado $B'C'$ es el doble de la longitud del lado $A'B'$. Otra forma de determinar la medida del lado $B'C'$ es advertir que la razón del lado AB al lado $A'B'$ es $3 : 1.2$. $\frac{3}{1.2} = 2.5$, por lo que lado BC es 2.5 veces la longitud del lado $B'C'$. Esto quiere decir que $B'C'$ mide $6 \div 2.5 = 2.4$ unidades.

Lección 9

$x = 6$. Las explicaciones pueden variar. Como los triángulos tienen la misma pendiente, sus razones de altura a base son equivalentes. Por ejemplo, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Lección 10

La pendiente de la recta es $\frac{1}{3}$.

Nota para cuidadores: En la gráfica, hay un triángulo de pendiente con una altura de 1 unidad y una base de 3 unidades, lo que da una razón de $\frac{1}{3}$.