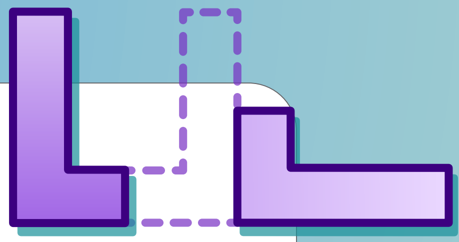
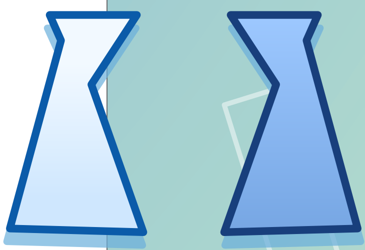


Unidad 1

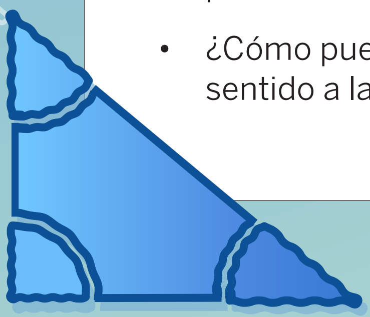
Transformaciones rígidas y congruencia

Si miras a tu alrededor, notarás figuras en el arte, la arquitectura y los objetos cotidianos. Las figuras tienen partes que se pueden medir, como lados y ángulos. ¿Le pasará algo a estas longitudes de lado y medidas de ángulo cuando *deslices*, *voltees* o *vires* estas figuras?



Preguntas esenciales

- ¿Cuáles son las diferentes maneras de transformar una figura?
- ¿Cómo podemos usar las transformaciones rígidas para decidir si dos figuras son congruentes?
- ¿Cómo pueden ayudarnos las transformaciones a dar sentido a las relaciones entre ángulos?



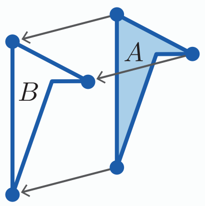
Podemos describir el movimiento de una figura para pasar de una posición a otra de diferentes maneras.

- Una figura puede deslizarse o moverse hacia arriba, abajo, izquierda o derecha.
- Una figura puede girar alrededor del centro o alrededor de otro punto.
- Una figura puede voltearse vertical, horizontal o diagonalmente.

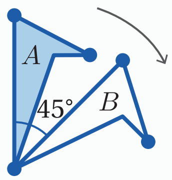
Prueba a hacer esto

Describe cómo la figura A se convirtió en la figura B.

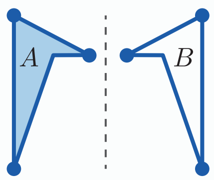
a



b



c



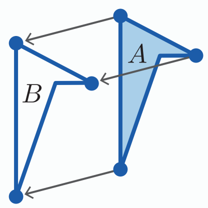
Resumen | Lección 2

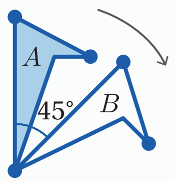
Las transformaciones son acciones que se pueden realizar para cambiar una figura. Se aplican a todos los puntos de la figura. Estos son algunos ejemplos:

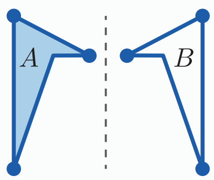
- Una **rotación** vira o gira una figura.
- Una **reflexión** voltea o refleja una figura sobre una línea moviendo cada punto a un punto directamente en el lado opuesto de la línea.
- Una **traslación** desliza una figura sin girarla.

Prueba a hacer esto

Identifica cada transformación como una rotación, reflexión o traslación.

a


b


c


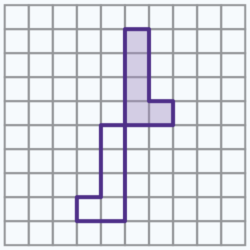
Resumen | Lección 3

Una **secuencia de transformaciones** es un conjunto de traslaciones, rotaciones o reflexiones que se puede aplicar a una figura. Cada secuencia de transformaciones tiene un orden significativo.

Estos son detalles importantes que considerar al elegir tu secuencia de transformaciones:

- Para las traslaciones, cada punto de la figura se mueve la misma distancia en la misma dirección.
- Para las reflexiones, el nuevo punto estará a la misma distancia de la línea que en la figura original.
- Las rotaciones se realizan alrededor de un punto con un ángulo dado y en una dirección específica.
  La dirección de una rotación puede ser **en el sentido de las manecillas del reloj**, yendo en la misma dirección que las agujas del reloj, o **en sentido contrario a las manecillas del reloj**, yendo en la dirección opuesta a las agujas del reloj.

Se pueden usar diferentes secuencias de transformaciones en una figura y obtener el mismo resultado.

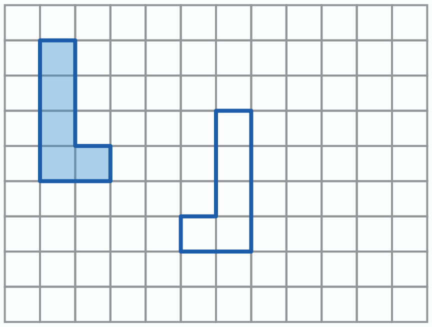


Por ejemplo, estas son dos secuencias de transformaciones que mueven la figura coloreada sobre la figura no coloreada:

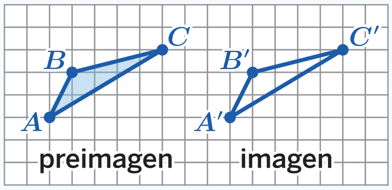
- Secuencia #1: Reflejar sobre el lado más largo y luego trasladar la figura 4 unidades hacia abajo.
- Secuencia #2: Rotar $180°$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la esquina inferior izquierda de la figura coloreada, luego reflejar sobre la línea horizontal que divide la altura en dos mitades.

Prueba a hacer esto

Describe una secuencia de transformaciones que mueva la figura coloreada sobre la figura no coloreada.

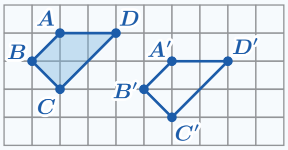


Cuando se transforma una figura, la figura original se llama **preimagen** y la nueva figura se llama **imagen**. Todos los puntos de la imagen **corresponden** a los puntos de la preimagen. Los puntos de la imagen se denominan según el punto de la preimagen al que corresponden.
Por ejemplo, el punto A' corresponde al punto A.



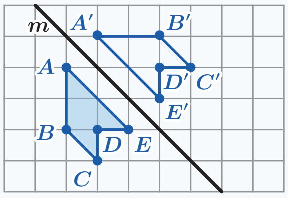
Estos son detalles importantes que te ayudarán a describir las transformaciones:

Traslaciones



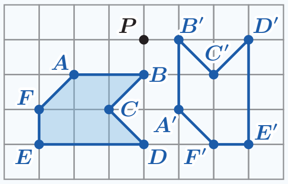
Describir la dirección (arriba o abajo, izquierda o derecha) y el número de unidades.
P. ej., la figura $ABCD$ se traslada 4 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo.

Reflexiones



Describir la línea de reflexión.
P. ej., la figura $ABCDE$ se refleja sobre la línea m.

Rotaciones

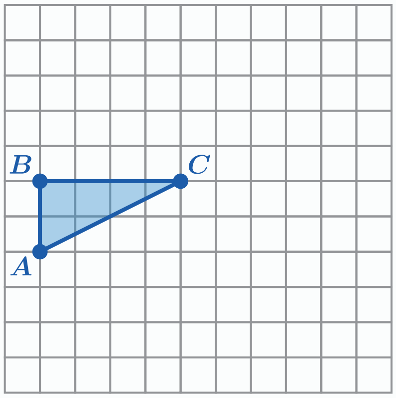


Describir el centro de rotación, el ángulo de rotación y la dirección (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario).
P. ej., la figura $ABCDEF$ se rota $90°$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto P.

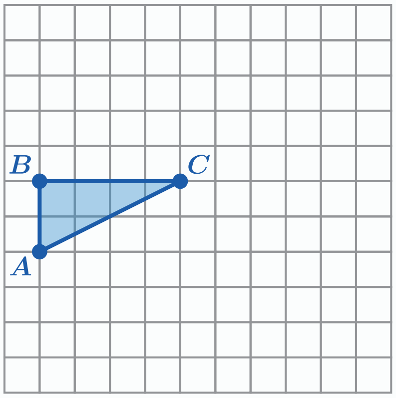
Prueba a hacer esto

Realiza cada traslación y luego denomina los puntos A', B'y C' en la imagen de modo que se correspondan con los puntos A, By C en la preimagen.

a Trasladar el triángulo ABC 4 hacia arriba y 2 unidades hacia la derecha.



b Rotar el triángulo ABC $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor del punto C.

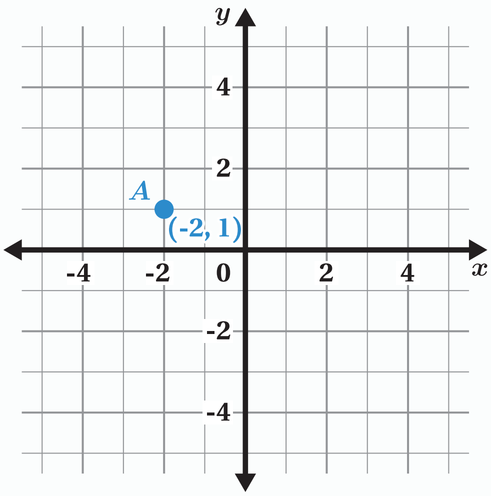


Cuando se comparan las coordenadas de los puntos correspondientes en la imagen y la preimagen, es posible notar patrones en sus valores.

- Cuando se traslada un punto a la izquierda o a la derecha, el valor de la coordenada x cambia.
- Cuando se traslada un punto hacia arriba o hacia abajo, el valor de la coordenada y cambia.
- Cuando se refleja un punto sobre el eje x, el signo de la coordenada y cambia. La coordenada x permanece igual.
- Cuando se refleja un punto sobre el eje y, el signo de la coordenada x cambia. La coordenada y permanece igual.

Prueba a hacer esto

Determina las coordenadas del punto A después de cada transformación.



a Una reflexión del punto A sobre el eje x:

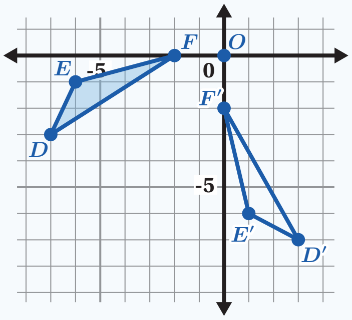
b Una reflexión del punto A sobre el eje y:

c Una traslación del punto A 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo:

Resumen | Lección 6

Cuando se comparan las coordenadas de los puntos correspondientes en una imagen y una preimagen, es posible notar patrones en sus valores.

En una rotación de $90°$ o $270°$, las coordenadas x y y cambian, y cambia el signo de una de ellas. En una rotación de $180°$, cambian los signos de las dos coordenadas. Para una rotación de $360°$, las dos coordenadas permanecen igual.



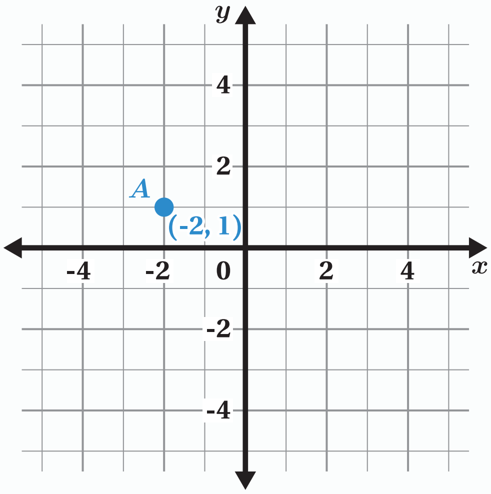
Por ejemplo, el triángulo DEF se viró $90°$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En los triángulos DEF y $D'E'F'$, las coordenadas x y y de cada punto cambian de lugar y algunos de los signos cambian.

Coordenadas de la preimagen	Coordenadas de la imagen
(-2, 0)	(0, -2)
(-6, -1)	(1, -6)
(-7, -3)	(3, -7)

Prueba a hacer esto

Determina las coordenadas del punto A después de cada transformación.



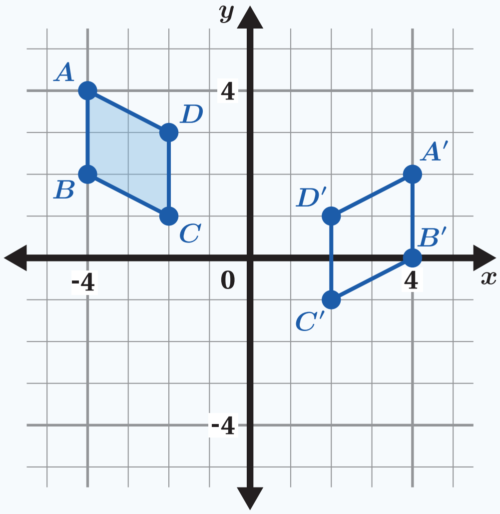
a Una rotación de $180°$ en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor del punto $(0, 0)$:

b Una rotación de $90°$ en sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del punto $(0, 0)$:

Resumen | Lección 7

Las traslaciones, rotaciones y reflexiones son todas ejemplos de **transformaciones rígidas**.

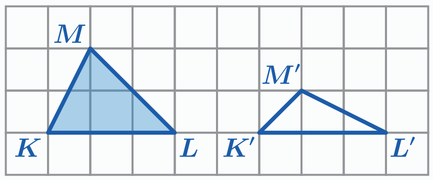
Cuando se transforma una preimagen mediante una transformación rígida, los lados correspondientes tendrán la misma longitud y los ángulos correspondientes tendrán la misma medida. Por ejemplo, la figura $A'B'C'D'$ es la imagen de la figura $ABCD$ después de una reflexión y una traslación. El lado AB tiene la misma longitud que el lado $A'B'$ y el ángulo C tiene la misma medida que el ángulo C'.



Prueba a hacer esto

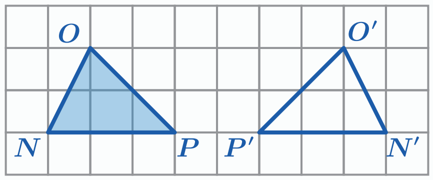
a Explica cómo sabes que el par E *no* muestra una transformación rígida.

Par E (transformación no rígida)



b Explica cómo sabes que el par F *muestra* una transformación rígida.

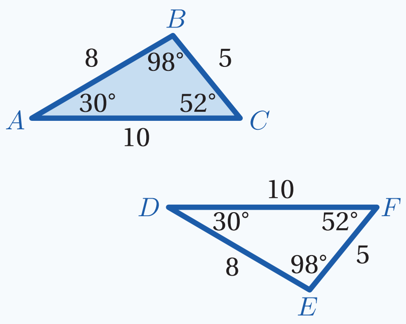
Par F (transformación rígida)



Dos figuras son **congruentes** si se puede usar una secuencia de transformaciones rígidas para mover una exactamente encima de la otra.

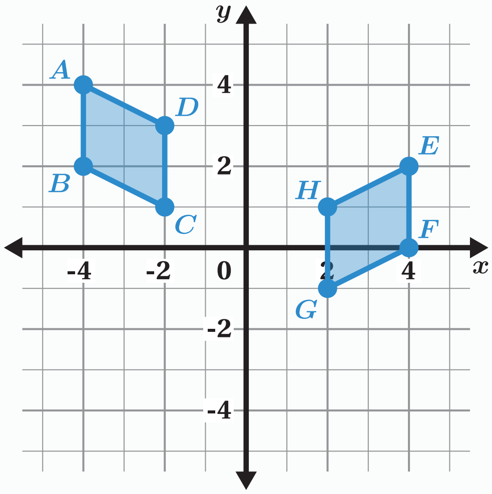
No es necesario comprobar que todas las medidas de los ángulos correspondientes y de las longitudes de los lados sean iguales si se puede demostrar una secuencia de transformaciones rígidas.

Por ejemplo, la figura DEF es congruente con la figura ABC porque se puede reflejar ABC sobre una línea horizontal y trasladarla para que encaje exactamente encima de la figura DEF.



Prueba a hacer esto

¿Son congruentes las figuras $ABCD$ y $EFGH$? Explica tu razonamiento.

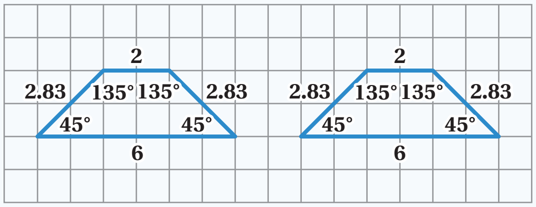


Aquí se muestran dos formas de determinar si dos figuras son congruentes:

- Se puede determinar una secuencia de transformaciones para mover una exactamente sobre la otra.
- Se puede determinar que *todos* los lados correspondientes tienen la misma longitud y *todos* los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

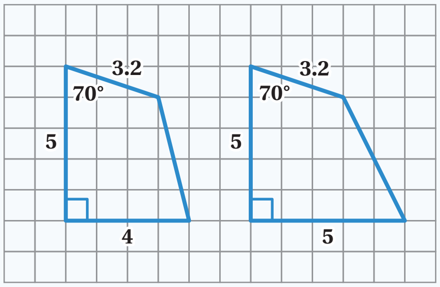
Dos figuras no son congruentes si las longitudes de sus lados correspondientes o las medidas de sus ángulos correspondientes no son iguales, o si tienen diferentes perímetros o áreas.

Congruentes



Estas figuras son congruentes porque todas las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos correspondientes son iguales.

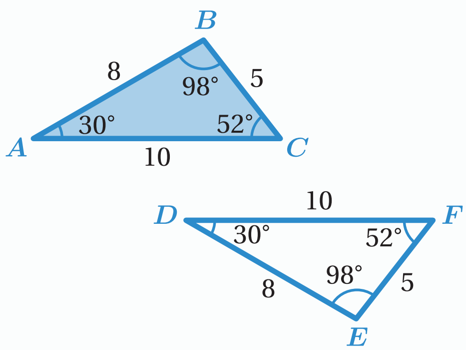
No congruentes



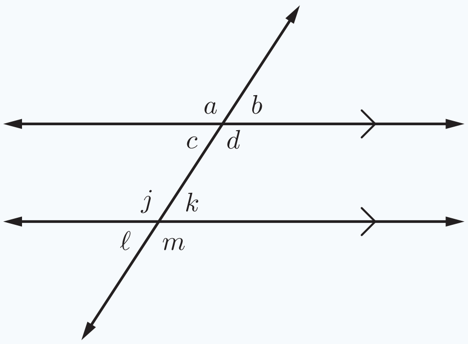
Estas figuras no son congruentes porque *algunas* de las longitudes de los lados y medidas son iguales, pero otras son diferentes.

Prueba a hacer esto

¿Son congruentes los triángulos ABC y DEF? Explica tu razonamiento.



Las transformaciones rígidas de una sola recta dan como resultado una recta. Las transformaciones rígidas de rectas paralelas dan como resultado rectas paralelas. Podemos utilizar estas propiedades para mostrar qué ángulos de un diagrama son congruentes.

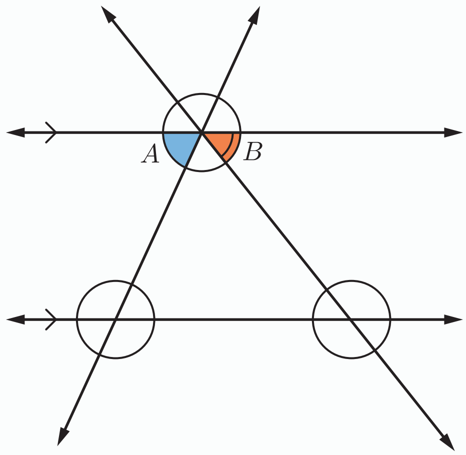


Podemos usar transformaciones para demostrar que los *ángulos verticales* (ángulos opuestos entre sí cuando dos rectas se intersecan) son congruentes. Por ejemplo, los ángulos verticales a y d son congruentes porque se puede rotar el ángulo a 180 grados alrededor de donde las rectas se intersecan y lo llevará al ángulo d.

Las transformaciones también pueden ser útiles para demostrar qué ángulos son congruentes cuando una **transversal** interseca rectas paralelas. El ángulo b es congruente con el ángulo k porque se puede trasladar el ángulo b a lo largo de la transversal hasta quedar exactamente sobre el ángulo k.

Prueba a hacer esto

Este es un par de rectas paralelas intersecadas por dos transversales.



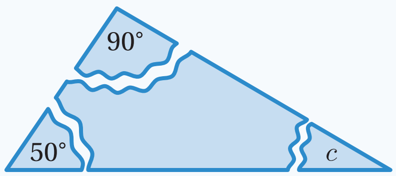
a Identifica cada ángulo congruente con el ángulo A. Rotula cada uno como A'.

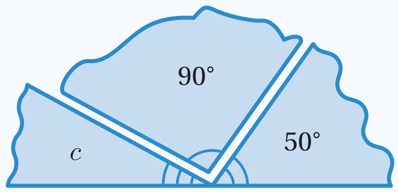
b Identifica cada ángulo congruente con el ángulo B. Rotula cada uno como B'.

Resumen | Lección 11

Las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo siempre suman 180 grados. Podemos demostrar esto reorganizando los ángulos de cualquier triángulo para formar una línea recta, que mide $180°$.

Si conoces las medidas de dos ángulos en un triángulo, puedes determinar el tercer ángulo restando la suma de las medidas de los dos ángulos conocidos a $180°$. Este es un ejemplo:

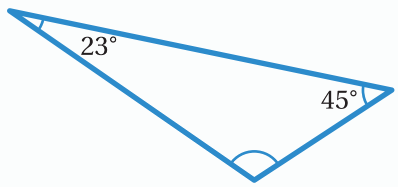




$$c = 180 - 90 - 50$$
$$c = 40$$

Prueba a hacer esto

Determina la medida del ángulo que falta en este triángulo.

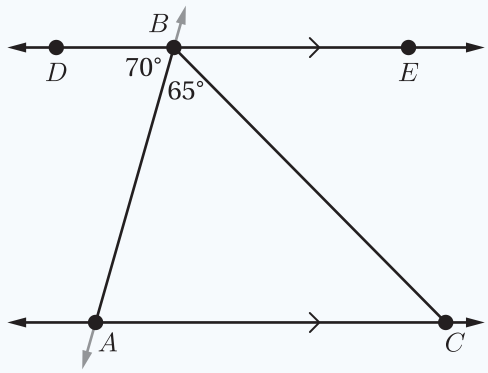


Existen varias estrategias que se pueden usar para determinar medidas desconocidas de ángulos en un diagrama.

- Usar traslaciones para demostrar que los ángulos correspondientes en rectas paralelas son congruentes.
- Usar rotaciones para demostrar que los ángulos verticales siempre son congruentes.
- Usar el hecho de que la suma de tres ángulos interiores en cualquier triángulo es 180 grados.
- Usar el hecho de que cualquier línea recta tiene un ángulo de 180°.

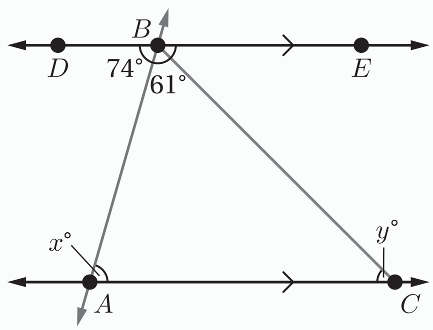
Este es un ejemplo: El ángulo DBA mide 70° y el ángulo ABC mide 65°. Determinemos las medidas de los ángulos restantes.

- La medida de $\angle BAC$ también debe ser 70° porque se puede trasladar y luego rotar $\angle DBA$ 180° para que encaje exactamente sobre $\angle BAC$.
- $\angle EBC$ debe ser 45° porque forma una línea recta con $\angle DBA$ y $\angle ABC$, y $70 + 65 + 45 = 180$.
- $\angle BCA$ también debe ser 45° porque se puede trasladar y rotar $\angle EBC$ para que encaje exactamente sobre él y también porque es parte de un triángulo con ángulos de 70° y 65°.



Prueba a hacer esto

Determina los valores de x y de y.

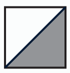


Puedes usar transformaciones rígidas para formar interesantes patrones repetitivos de figuras, tales como los **teselados**. Un teselado es cualquier tipo de patrón repetitivo que puede llenar un plano completo sin espacios.

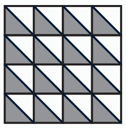
Vemos teselados en muchas creaciones de todo el mundo, pero son especialmente comunes en el arte y arquitectura islámicos. También puedes ver estos patrones geométricos repetidos en pisos, techos, murales e incluso en diseños de ropa.

Prueba a hacer esto

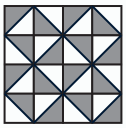
A continuación se presenta un diseño que puede utilizarse para crear un teselado, acompañado de dos ejemplos.



Teselado #1

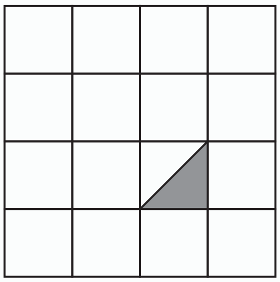


Teselado #2



Haz un teselado añadiendo copias del diseño a la cuadrícula.

Tu teselado



Prueba a hacer esto | Clave de respuestas

Lección 1

a *Las respuestas pueden variar.* Se deslizó hacia la izquierda y hacia abajo.

b *Las respuestas pueden variar.* Giró alrededor de un punto en la figura.

c *Las respuestas pueden variar.* Se volteó horizontalmente sobre la línea.

Lección 2

a Traslación

b Rotación

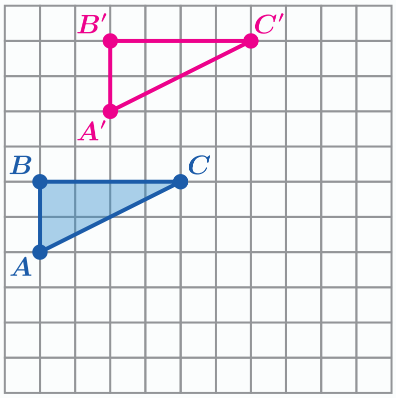
c Reflexión

Lección 3

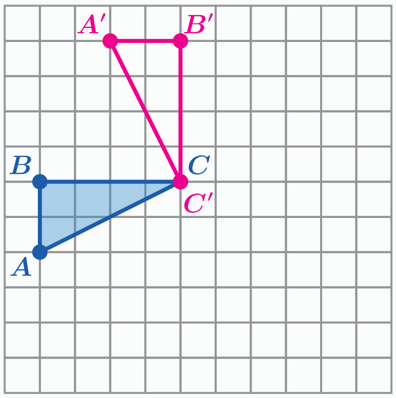
Las respuestas pueden variar. Refleja la figura coloreada sobre el extremo derecho y luego muévela 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

Lección 4

a



b



Lección 5

a (-2, -1)

b (2, 1)

c (1, -1)

Lección 6

a (2, -1)

b (-1, -2)

Lección 7

a *Las respuestas pueden variar.* Los ángulos correspondientes M y M' no tienen la misma medida.

b *Las respuestas pueden variar.* Todas las medidas correspondientes de NOP y $N'O'P'$ son iguales.

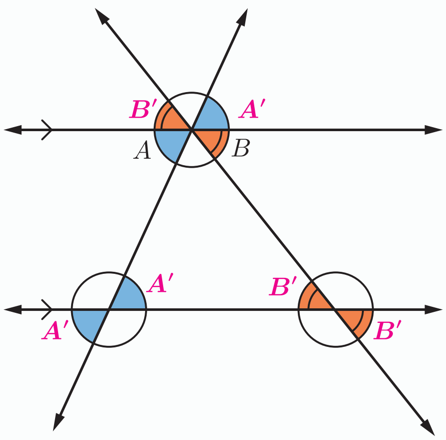
Lección 8

Sí. Las *explicaciones pueden variar.* Si reflejas la figura $ABCD$ sobre el eje y y luego la trasladas 2 unidades hacia abajo, caerá exactamente encima de la figura $EFGH$.

Lección 9

Sí. *Las explicaciones pueden variar.* Puedes reflejar el triángulo ABC sobre una línea horizontal y luego trasladarlo de modo que encaje exactamente sobre el triángulo DEF. Además, los triángulos ABC y DEF tienen las mismas longitudes de lado y medidas de ángulo.

Lección 10



Lección 11

$180 - 23 - 45 = 112°$

Lección 12

$x = 74$ y $y = 45$

Lección 13

Se muestra un ejemplo de teselado.