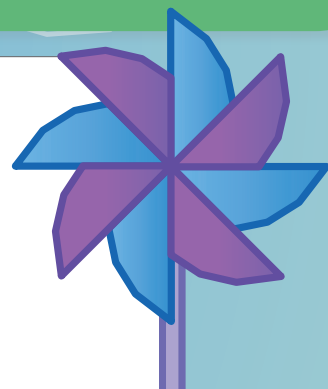


Unidad **7**

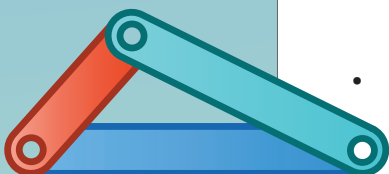
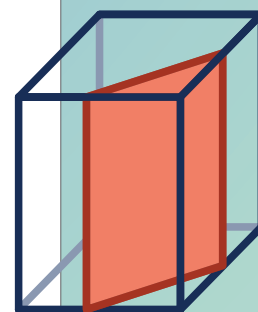
Ángulos, triángulos y prismas



Siempre hay algo más de lo que notamos a simple vista. Los ángulos y las figuras pueden tener cierta apariencia pero, ¿cómo podemos estar completamente seguros? ¿Cómo sabemos si lo que percibimos también es real? ¿Hay algo especial acerca de un par de ángulos? ¿Son dos triángulos que parecen iguales realmente iguales? ¿Puedo seccionar un objeto de varias formas diferentes? En esta unidad, explorarás relaciones de ángulos especiales, triángulos singulares y secciones transversales de sólidos geométricos para responder este tipo de preguntas.

Preguntas esenciales

- ¿Qué estrategias son útiles para determinar medidas desconocidas de ángulos?
- ¿Cuántos polígonos únicos son posibles con distintos grupos de longitudes de lado y medidas de ángulos?
- ¿Qué variedad de figuras puedes formar al hacer secciones transversales de figuras tridimensionales?

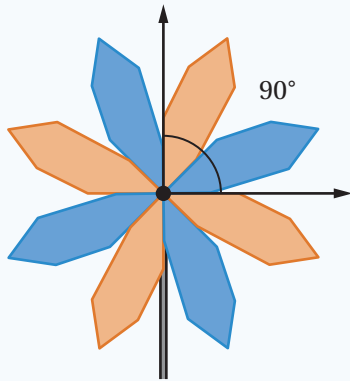


Una de las estrategias para determinar las medidas de ángulos desconocidas es compararlas con las medidas de ángulos que se conocen.

Aquí se muestran tres ángulos familiares y la manera de usarlos para determinar la medida de un ángulo de un molinete hecho de piezas idénticas.

Ángulo recto (90°)

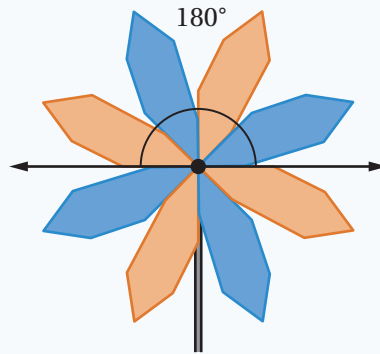
Un *ángulo recto* mide la mitad de un ángulo llano. Mide 90° .



$$45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Ángulo llano (180°)

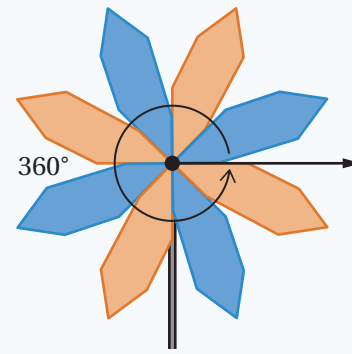
Un *ángulo llano* forma una línea recta. Mide 180° .



$$\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

Círculo (360°)

La medida alrededor de un círculo es 360° .

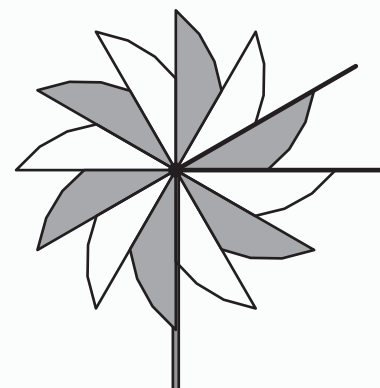


$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Prueba a hacer esto

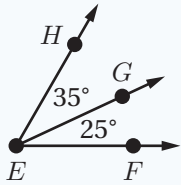
Este es el diseño del molinete de Kadeem.

- a** ¿Qué ángulo usó?
- b** Explica tu estrategia para calcular el ángulo de Kadeem.



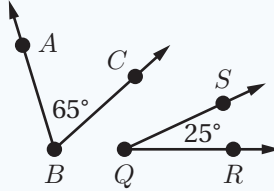
Estas son tres relaciones de ángulos que pueden ayudarte a determinar medidas de ángulos desconocidas.

Los ángulos adyacentes comparten un lado y un vértice.



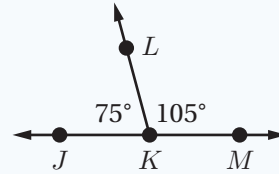
$\angle HEG$ y $\angle FEG$ son ángulos adyacentes.

Los ángulos complementarios tienen medidas que suman 90° .



$\angle ABC$ y $\angle RQS$ son ángulos complementarios.

Los ángulos suplementarios tienen medidas que suman 180° .



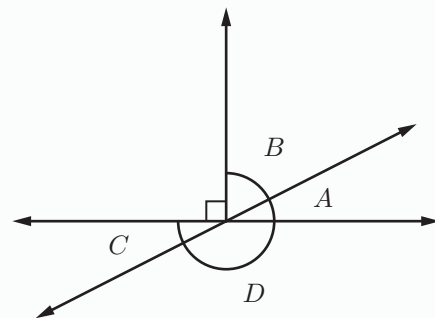
$\angle JKL$ y $\angle MKL$ son ángulos suplementarios.

Prueba a hacer esto

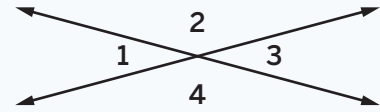
La medida del ángulo $A = 25^\circ$.

A y B son ángulos complementarios.

¿Cuál es la medida del ángulo B ?



Cuando dos rectas se intersecan, los ángulos opuestos miden lo mismo. Estos ángulos se llaman ángulos verticales.



$\angle 1$ y $\angle 3$ son un par de ángulos verticales. Otro par es $\angle 2$ y $\angle 4$.

Usar ángulos verticales puede ayudarte a determinar medidas de ángulo desconocidas.

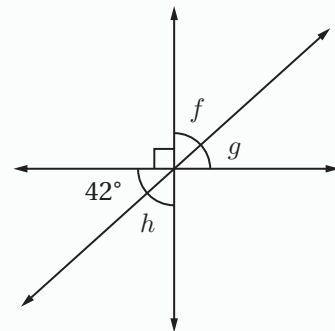
Por ejemplo, si la medida del ángulo 1 es 30° , entonces:

- La medida del ángulo 3 es 30° porque $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.
- La medida del ángulo 2 es 150° porque $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos suplementarios.
- La medida del ángulo 4 es 150° porque $\angle 2$ y $\angle 4$ son ángulos verticales.

Prueba a hacer esto

Determina los valores de f , g y h .

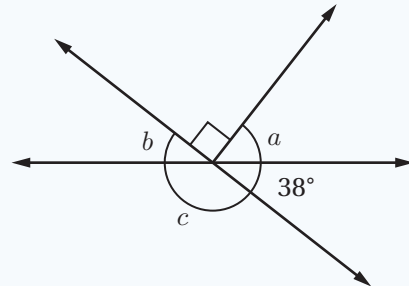
Ángulo	Medida (grados)
f	
g	
h	



Las relaciones de ángulos pueden ayudarte a escribir ecuaciones para determinar medidas de ángulo desconocidas.

Aquí hay varias ecuaciones que representan las relaciones de los ángulos en este diagrama.

Ecuación	Relación
$a + 38 = 90$	ángulos complementarios
$c + 38 = 180$	ángulos suplementarios
$b + c = 180$	ángulos suplementarios
$b = 38$	ángulos verticales
$a + b + c + 90 + 38 = 360$	círculo



Puedes resolver estas ecuaciones para determinar los valores de a , b y c .

En este diagrama, $a = 52^\circ$, $b = 38^\circ$ y $c = 142^\circ$.

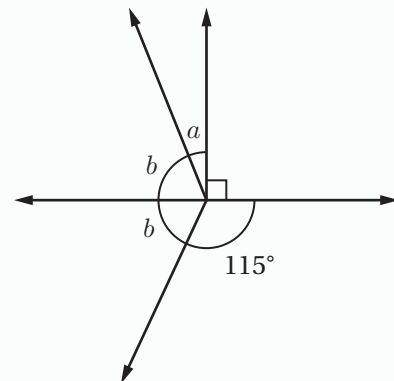
Prueba a hacer esto

Este es un diagrama de ángulos.

- a** Escribe *al menos* una ecuación basándote en esta diagrama.

- b** Determina los valores de a y b .

Ángulo	Medida (grados)
a	
b	



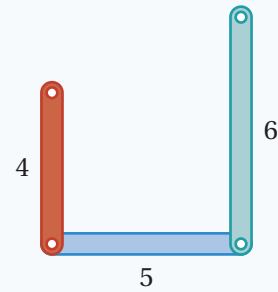
Tres segmentos de recta no siempre forman un triángulo.

Para que tres segmentos de recta formen un triángulo, la suma de las longitudes de los dos segmentos más cortos debe ser mayor que la longitud del tercer segmento.

Por ejemplo, $4 + 5 > 6$, por lo que estos tres segmentos de recta forman un triángulo.

Puedes usar esta relación para determinar las posibles longitudes que formarían un triángulo.

Por ejemplo, si dos longitudes de lado de un triángulo miden 3 unidades y 7 unidades, el tercer lado debe medir más de 4 y menos de 10 unidades.



Prueba a hacer esto

Tasia quiere formar dos triángulos.

- a** ¿Formarán un triángulo las longitudes de lado de 4, 8 y 10 unidades?

Explica tu razonamiento.

- b** Otro triángulo tiene dos longitudes laterales que miden 7 y 13 unidades.

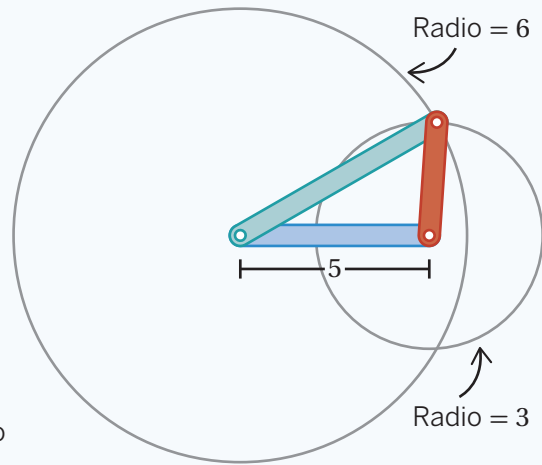
¿Cuál es una longitud posible del tercer lado?

Explica tu razonamiento.

Puedes usar círculos para dibujar triángulos.

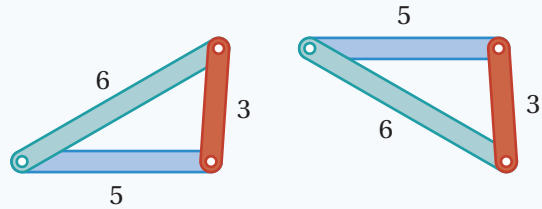
Estos son los pasos para dibujar un triángulo con lados que miden 5, 3 y 6 unidades de longitud:

- Dibujar un segmento de recta que mida 5 unidades de longitud.
- Dibujar un círculo con un *radio* de 3 unidades centrado en un extremo.
- Dibujar un círculo con un radio de 6 unidades centrado en el otro extremo.
- Dibujar segmentos de recta que conecten los extremos del segmento de 5 unidades con un punto donde se intersecan ambos círculos.



Todos los triángulos cuyos lados midan 5, 3 y 6 unidades de longitud serán **copias idénticas** ya que tienen la misma forma y tamaño.

De hecho, solo se puede formar un triángulo único si se conocen las tres longitudes de lado (al menos que no puedas formar ningún triángulo).



Prueba a hacer esto

¿Cuántos triángulos no idénticos puedes formar utilizando estas longitudes?

Muestra o explica tu razonamiento.

a 4.5, 8 y 10 unidades

b 9, 11 y 21 unidades

Si tres longitudes de lado forman un triángulo, todos los triángulos con esas longitudes de lado serán copias idénticas. ¿Pero qué hay de una combinación de longitudes de lado y ángulos? Algunas combinaciones de medidas pueden formar más de un triángulo único.

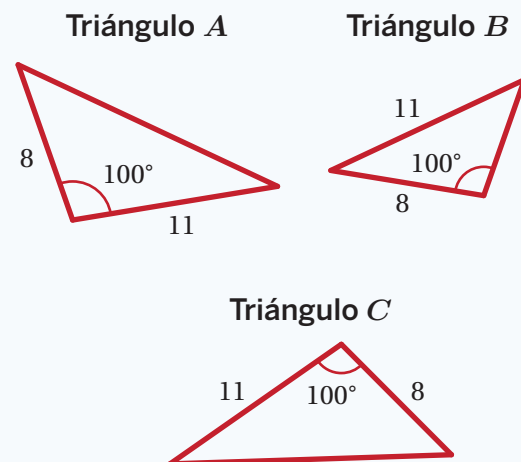
Aquí hay tres triángulos: A , B y C .

Cada triángulo tiene tres de las mismas medidas: un lado que mide 8 unidades de longitud, un lado que mide 11 unidades de longitud y un ángulo de 100° .

Sólo los triángulos A y C son *copias idénticas* porque el ángulo de 100° está entre las longitudes de lado que miden 8 y 11 unidades.

Esto significa que hay más de un triángulo único que se puede formar con estas medidas.

En general, conocer el orden o ubicación de los lados y ángulos es útil para determinar si dos triángulos son *copias idénticas* y cuántos triángulos únicos hay.



Prueba a hacer esto

Mariam y Jamir dibujan triángulos que tienen un lado de 5 centímetros, un ángulo de 60° y otro ángulo de 45° .

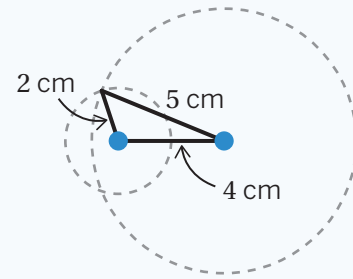
- a** ¿Serán idénticos los triángulos de Mariam y Jamir?

Muestra o explica tu razonamiento.

- b** ¿Qué información necesitaría Jamir sobre el triángulo de Mariam para estar seguro de que está creando un triángulo idéntico?

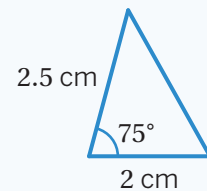
Puedes usar un transportador, una regla y un compás para dibujar triángulos con medidas dadas.

Por ejemplo, dadas tres longitudes de lado, usar una regla y un compás para dibujar círculos con radios que coinciden con las longitudes dadas puede ser útil para dibujar un triángulo.



Se puede dibujar un solo triángulo único cuando lo que se proporciona son tres longitudes de lado. Cuando lo que se proporciona son dos longitudes de lado y la medida de un ángulo, se pueden dibujar múltiples triángulos no idénticos.

Por ejemplo, esta es una estrategia para dibujar un triángulo que tiene un ángulo de 75° , una longitud de lado de 2 centímetros y una longitud de lado de 2.5 centímetros.

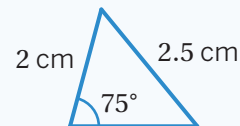


Paso 1: Dibujar un segmento de recta de 2 centímetros.

Paso 2: Dibujar un ángulo de 75° usando un transportador.

Paso 3: Medir 2.5 centímetros a lo largo de la otra semirrecta del ángulo y conectar el triángulo.

Este es otro triángulo no idéntico que tiene las mismas tres medidas. El ángulo de 75° se puede ubicar en distintas posiciones en relación a los lados de 2 y 2.5 centímetros.



Prueba a hacer esto

Dibuja un triángulo utilizando cada conjunto de medidas. Explica tus pasos.

- a** Un lado de 2 centímetros, un lado de 2.5 centímetros y un ángulo de 75° .

Dibujo

Mis pasos

- b** Un lado de 4 centímetros, un ángulo de 40° y un ángulo de 90° .

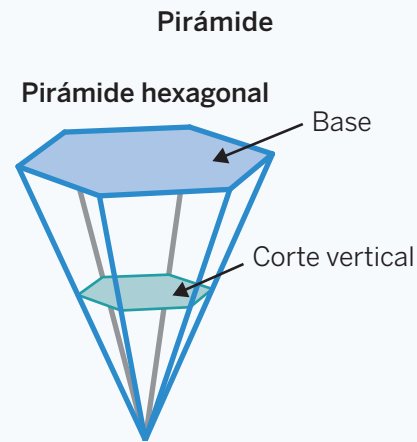
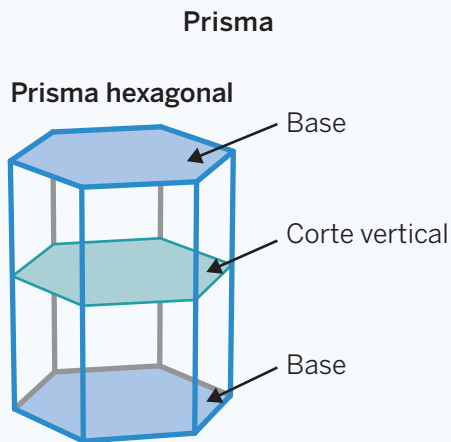
Dibujo

Mis pasos

Una **sección transversal** es la figura que se ve al cortar una figura tridimensional.

Por ejemplo, si se corta un *prisma* hexagonal en forma paralela a la *base*, la sección transversal es un hexágono que tiene el mismo tamaño que la base. Si en su lugar se hace un corte vertical, la sección transversal es un rectángulo que es tan alto como el prisma.

Si se corta una *pirámide* hexagonal en forma paralela a la base, la sección transversal es un hexágono más pequeño que la base. Si en su lugar se hace un corte vertical, la sección transversal es un triángulo que es más alto que ancho.

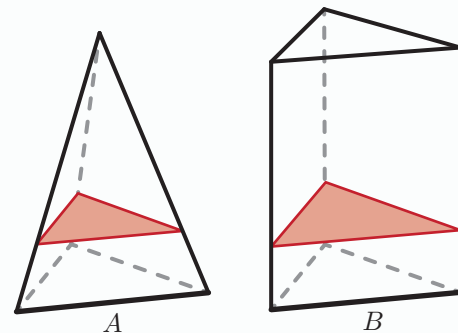


Prueba a hacer esto

Vihaan tiene una pirámide triangular y un prisma triangular.

Cortó la pirámide y el prisma paralelos a sus bases.

a ¿En qué se parecen las secciones transversales?



b ¿En qué se diferencian las secciones transversales?

Toda sección transversal de un prisma que sea paralela a la base será idéntica a la base. Esto significa que se puede cortar un prisma en capas para facilitar el cálculo de su *volumen*.

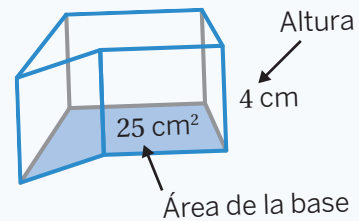
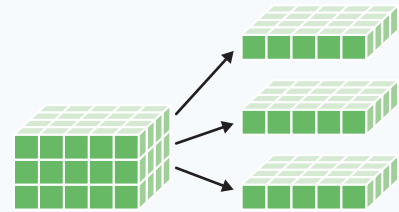
Por ejemplo, si tienes un prisma rectangular que mide 3 unidades de altura con una base de 4 unidades por 5 unidades, puedes imaginarte el prisma como 3 capas de $4 \cdot 5$ unidades cúbicas.

Esto significa que el volumen de este prisma rectangular es $(4 \cdot 5) \cdot 3$ unidades cúbicas.

En general, se puede calcular el volumen de cualquier prisma multiplicando el área de su base por su altura.

En otras palabras, el volumen de un prisma es $V = B \cdot h$, donde h es su altura y B es el área de su base.

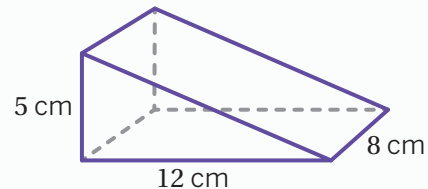
Por ejemplo, este prisma tiene un volumen de 100 centímetros cúbicos porque $25 \cdot 4 = 100$.



Prueba a hacer esto

Aquí se muestra un prisma.

a Sombrea una base de este prisma.



b Calcula el volumen del prisma.

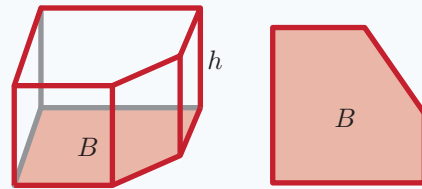
Muestra tu razonamiento.

Para calcular el volumen de un prisma, puedes multiplicar el área de la base, B , por la altura, h .

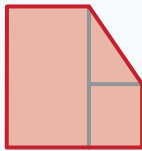
A veces, la forma de la base de un prisma es un *polígono* más complejo.

Hay muchas estrategias para calcular el área de una figura compleja, incluyendo su descomposición en triángulos y rectángulos, o rodear la figura de un rectángulo y restar las partes que no van.

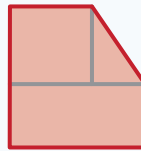
Estos son tres primeros pasos que podrías usar para calcular el área de la base de un prisma:



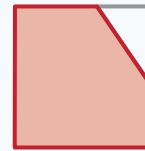
Ejemplo 1



Ejemplo 2



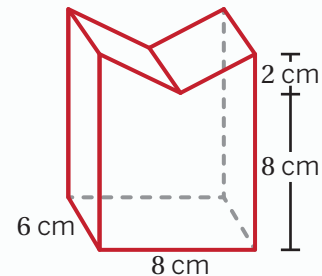
Ejemplo 3



Prueba a hacer esto

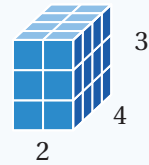
Calcula el volumen de este prisma.

Muestra tu razonamiento.



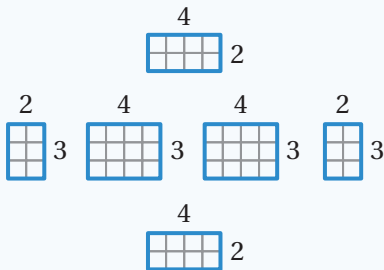
El *área de superficie* de una figura tridimensional es el número de unidades cuadradas que cubren todas las caras del poliedro, sin espacios ni superposiciones.

Estas son dos estrategias para calcular el área de superficie de un prisma rectangular.



Estrategia 1

Calcular el área de cada una de las caras individuales y luego sumar todas las áreas.

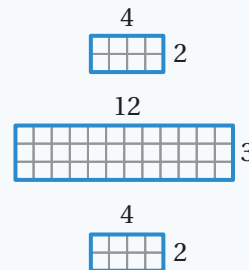


$$8 + 6 + 12 + 12 + 6 + 8 = 52$$

Área de superficie: 52 unidades cuadradas

Estrategia 2

Descomponer el prisma en sus dos bases idénticas y desdoblar sus lados para convertirlos en un rectángulo largo. Sumar las tres áreas.



$$8 + 36 + 8 = 52$$

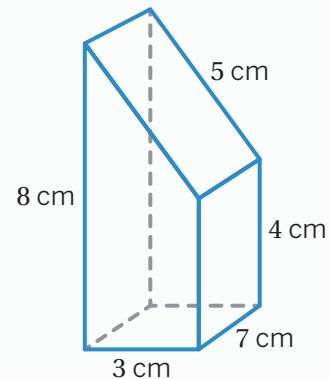
Área de superficie: 52 unidades cuadradas

Usar cualquiera de las estrategias para calcular el área de superficie o usar cálculos equivalentes resultará en la misma área de superficie total.

Prueba a hacer esto

Calcula el área de superficie de este prisma.

Muestra tu razonamiento.



Saber cuándo calcular el volumen y cuándo el área de superficie puede ser útil para responder preguntas sobre situaciones en contexto.

Preguntas relacionadas con el volumen:

- ¿Cuánta agua cabe en un recipiente?
- ¿Qué cantidad de material se necesitó para construir un objeto sólido?

Preguntas relacionadas con el área de superficie:

- ¿Cuánta tela se necesita para cubrir una superficie?
- ¿Cuánto de un objeto debe pintarse?

Una forma de decidir si una pregunta trata de volumen o de área de superficie es pensar en las unidades de medida. El volumen se mide en unidades cúbicas y el área de superficie se mide en unidades cuadradas.

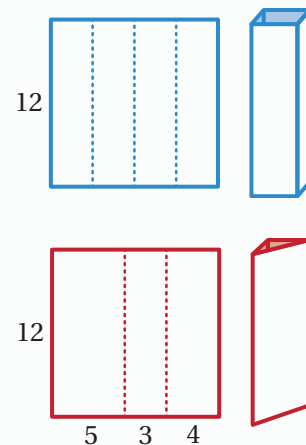
Prueba a hacer esto

Zahra está plegando papel de origami para hacer portalápices para su habitación. Pliega dos portalápices: un prisma cuadrangular y un prisma triangular recto.

- a** ¿En qué contenedor caben más lápices?

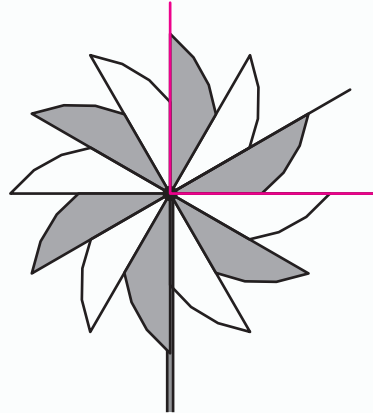
Calcula la cantidad que puede contener cada uno para respaldar tu afirmación.

- b** Zahra añadió un fondo y una tapa a cada contenedor. ¿Cuál contenedor usa más papel?



Lección 1

- a** 30°
- b** Las explicaciones pueden variar.
- Hay 12 piezas y toda la vuelta alrededor mide 360° , así que un ángulo mide $\frac{360}{12} = 30^\circ$.
 - Hay 3 piezas en cada ángulo recto y $30 \cdot 3 = 90^\circ$.



Lección 2

65°

Nota para cuidadores: Si A y B son ángulos complementarios, suman 90° . $90 - 25 = 65$

Lección 3

Ángulo	Medida (grados)
f	48
g	42
h	48

Lección 4

- a** Las respuestas pueden variar. $a + 65 = 90$, $b + 115 = 180$, $a + b = 90$, $a + b + b + 90 + 115 = 360$ (o equivalente)

b

Ángulo	Medida (grados)
a	25
b	65

Lección 5

- a** Sí. *Las explicaciones pueden variar.* Si la suma de los dos lados más cortos es más larga que el tercer lado, entonces formará un triángulo. $4 + 8 > 10$, así que estos tres lados formarán un triángulo.
- b** *Las respuestas y explicaciones pueden variar.* Una longitud de 8 unidades crearía un triángulo porque si lo conectaras con el otro lado de 11 unidades, sería lo suficientemente largo como para conectar también con el lado de 7 unidades. $7 + 8 > 11$

Nota para cuidadores: Cualquier longitud superior a 6 e inferior a 20 formaría un triángulo.

Lección 6

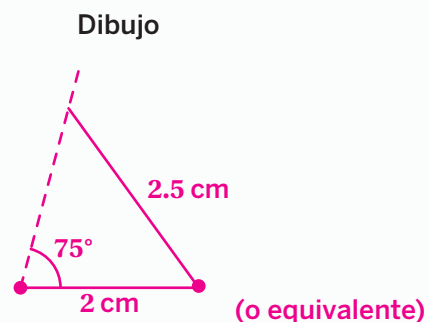
- a** Un triángulo. *Las explicaciones pueden variar.* Se puede formar exactamente un triángulo con estas tres longitudes de lado porque la suma de los dos lados más cortos es mayor que el tercer lado: $4.5 + 8 > 10$. Cualquier otro triángulo que hagas usando estas tres longitudes de lado sería una copia idéntica porque tiene la misma forma y tamaño que el original y encajaría justo encima del triángulo original si se voltea o gira.
- b** Ningún triángulo. *Las explicaciones pueden variar.* La suma de los dos lados más cortos es menor que el lado más largo, por lo que estos lados no formarán un triángulo. $9 + 11 < 21$

Lección 7

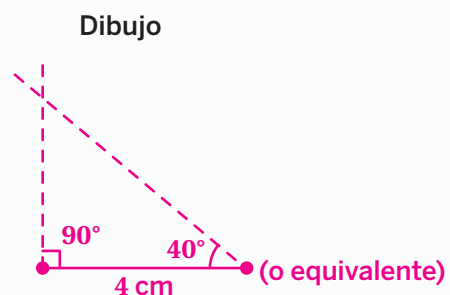
- a** Tal vez. *Las explicaciones pueden variar.* Los triángulos podrían ser idénticos, pero Mariam y Jamir podrían haber colocado el lado en lugares diferentes, lo que formaría triángulos distintos.
- b** Jamir necesitaría saber si el lado de 5 centímetros está entre los dos ángulos, adyacente solo al ángulo de 60° o adyacente solo al ángulo de 45° .

Lección 8

- a** Mis pasos
- Las respuestas pueden variar.*
- Paso 1: Dibujar un segmento de 2 centímetros.
- Paso 2: Dibujar un ángulo 75° en uno de los extremos de la recta de 2 centímetros.
- Paso 3: Dibujar un segmento de 2.5 centímetros desde el otro extremo de la recta de 2 centímetros.



- b** Mis pasos
- Las respuestas pueden variar.*
- Paso 1: Dibujar un segmento de 4 centímetros.
- Paso 2: Dibujar un ángulo de 90° y un ángulo de 40° .
- Paso 3: Extender los ángulos hasta que las rectas se crucen.

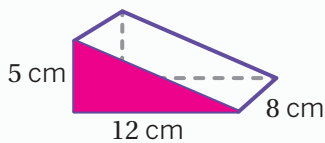


Lección 9

- a Las respuestas pueden variar.
- Los dos son triángulos.
 - Los dos tienen la misma figura como base.
 - Los dos son copias a escala de la base.
- b Las respuestas pueden variar.
- La sección transversal del prisma es del mismo tamaño que su base.
 - La sección transversal de la pirámide es más pequeña que su base.
 - La sección transversal de la pirámide parece más pequeña que la sección transversal del prisma.

Lección 10

- a Las respuestas pueden variar.

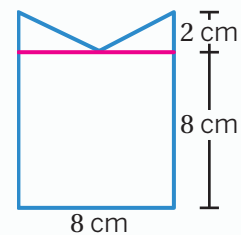


- b 240 centímetros cúbicos

Nota para cuidadores: Una estrategia consiste en multiplicar el área de la base por la altura del prisma. $V = \frac{1}{2}(5 \cdot 12) \cdot 8 = 240$

Lección 11

432 centímetros cúbicos. *Los trabajos pueden variar.* Halla el área de la base y multiplícala por la altura del prisma. Como la base es una figura compleja, puede dividirse en dos triángulos idénticos y un cuadrado. Para hallar el área de la base, suma el área del cuadrado, $8 \cdot 8 = 64$, a las áreas de los 2 triángulos, $\frac{1}{2}(4 \cdot 2) + \frac{1}{2}(4 \cdot 2) = 8$. El área de la base mide $64 + 8 = 72$ centímetros cuadrados y $V = 72 \cdot 6 = 432$ centímetros cúbicos.



Lección 12

176 centímetros cuadrados. *Los trabajos pueden variar.* Calcula el área de cada cara y súmalas. Este prisma tiene 6 caras. $SA = 18 + 18 + 28 + 35 + 56 + 21 = 176$

Lección 13

- a** El prisma cuadrangular. *Las explicaciones pueden variar.* El área de la base del portalápices del prisma cuadrangular mide 3 unidades por 3 unidades, así que el área de su base mide 9 unidades cuadradas. El área de la base del portalápices del prisma triangular recto mide $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ unidades cuadradas. Como ambos portalápices tienen la misma altura, podemos comparar las áreas de las bases para determinar que el portalápices del prisma cuadrangular tiene un volumen mayor y puede contener más lápices.
- b** El prisma cuadrangular. *Las explicaciones pueden variar.* La cantidad de papel utilizada para las caras laterales de cada prisma es la misma ya que se trata de diferentes formas de doblar un trozo de papel del mismo tamaño. Esto significa que la única diferencia son las áreas de las bases. Ya sabemos que el área de la base del prisma cuadrado es mayor que el área de la base del prisma triangular recto, por lo que también debe utilizar más papel.