

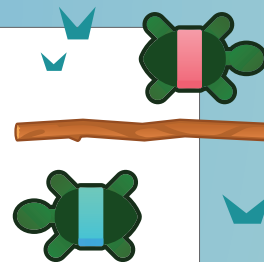
Unidad 5

Operaciones con números positivos y negativos

Podemos usar números positivos y negativos para describir muchas situaciones de la vida diaria. ¿Cuánto subirá o bajará la temperatura a medida que avanza el día? ¿Cuál será la nueva temperatura? ¿Hasta que profundidad puede llegar un buzo? ¿Cuál es la diferencia entre la profundidad del buzo y la de un anillo que cayó al fondo de la piscina? En esta unidad, tendrás la oportunidad de seguir explorando operaciones con números positivos y negativos para responder preguntas de la vida cotidiana como estas.

Preguntas esenciales

- ¿Cómo se representan la suma, la resta, la multiplicación o la división de números en una recta numérica?
- ¿En qué se asemeja o diferencia la resolución de problemas con fracciones o decimales de la resolución de problemas solo con números naturales?
- ¿Cómo se pueden usar números positivos o negativos para representar situaciones de la vida real?



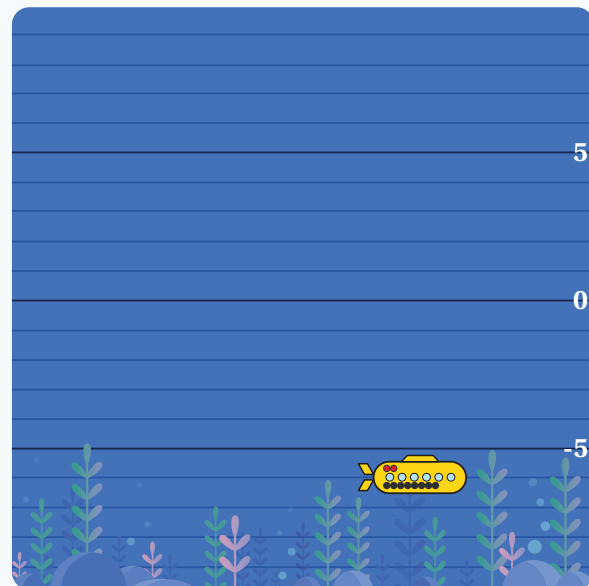
Usar modelos como flotadores y anclas en una recta numérica vertical puede ser útil para representar la suma y la resta de números positivos y negativos.

Por ejemplo, imagina un submarino cuya posición está en -6 unidades. El submarino se desplazará de su posición ya que se añaden 3 flotadores y se quitan 2 anclas.

- Añadir 3 flotadores representa subir 3 unidades, o bien añadir 3.
- Quitar 2 anclas representa subir 2 unidades, o bien $-(-2) = 2$.

La nueva posición del submarino sería $-6 + 3 + 2 = -1$ unidades.

Para hacer que el submarino se desplace a 0 unidades desde -1 unidades, se puede añadir 1 flotador. -1 y 1 es un *par de opuestos*, lo que significa que su suma es 0.



Prueba a hacer esto

Un submarino está controlado por flotadores y anclas.

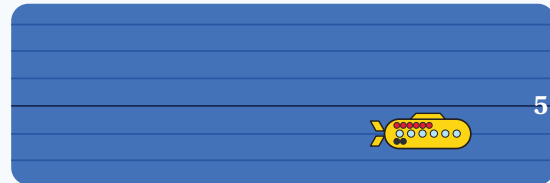
Introduce la información que falta en la tabla.

Posición inicial	Acción	Posición final
-3	Añadir 2 flotadores	-1
-3	Quitar 2 anclas	
-3	Añadir 11 flotadores	
-3		0
-3		-7

Distintas combinaciones de flotadores y anclas pueden dar el mismo resultado. Estos son algunos ejemplos:

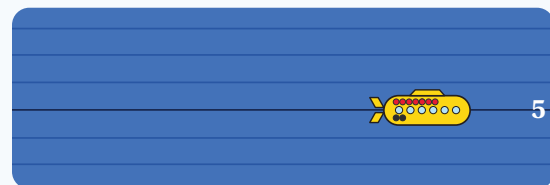
- Si un submarino comienza en 4 unidades, añadir 2 flotadores o quitar 2 anclas resultará en que el submarino suba a 6 unidades. Por lo tanto, sumar un número positivo es lo mismo que restar un número negativo.

Añadir flotadores	Quitar anclas
$4 + 2 = 6$	$4 - (-2) = 6$



- Si un submarino comienza en 5 unidades, quitar 1 flotador o añadir 1 ancla resultará en que el submarino baje a 4 unidades. Por lo tanto, restar un número equivale a sumar su opuesto.

Quitar flotadores	Añadir anclas
$5 - 1 = 4$	$5 + (-1) = 4$



Cuando se suman dos valores que son opuestos, la suma siempre da 0. Estos números también se denominan *inversos aditivos*.

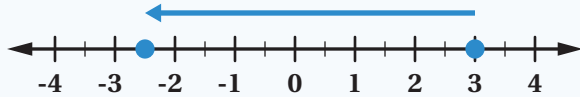
Prueba a hacer esto

Completa la tabla para estas cuatro situaciones de submarinos.

Posición inicial	Acción	Expresión	Posición final
-2	Añadir 6 flotadores	$-2 + 6$	4
	Quitar 5 anclas	$1 - (-5)$	
3		$3 - 7$	
		$-1 + (-4)$	

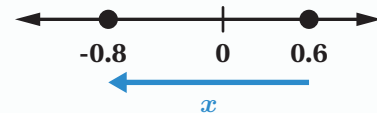
Al sumar fracciones y decimales positivos y negativos, puede ser útil usar una recta numérica y pensar que cada ecuación representa un inicio + un cambio = el final.

Por ejemplo, en la ecuación $3 + (-5.5) = x$, 3 representa la ubicación al inicio, -5.5 representa el cambio (desplazamiento de 5.5 unidades a la izquierda) y x representa la ubicación final.



Prueba a hacer esto

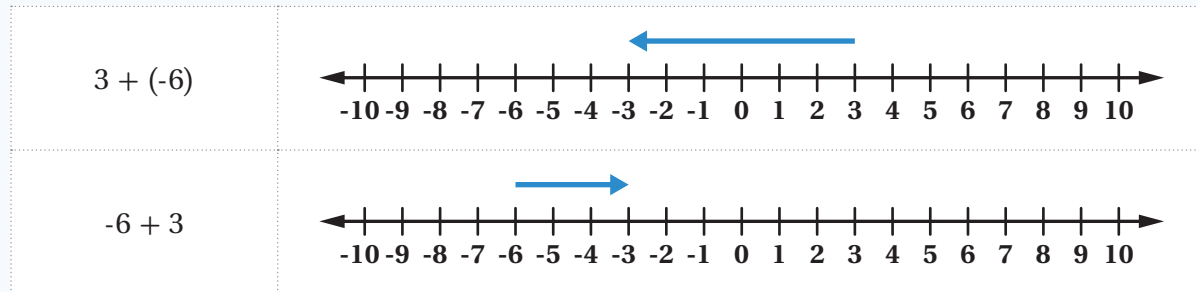
- a** Escribe una ecuación que represente este desafío.



- b** ¿Cuál es el valor de x que hace que tu ecuación sea verdadera?

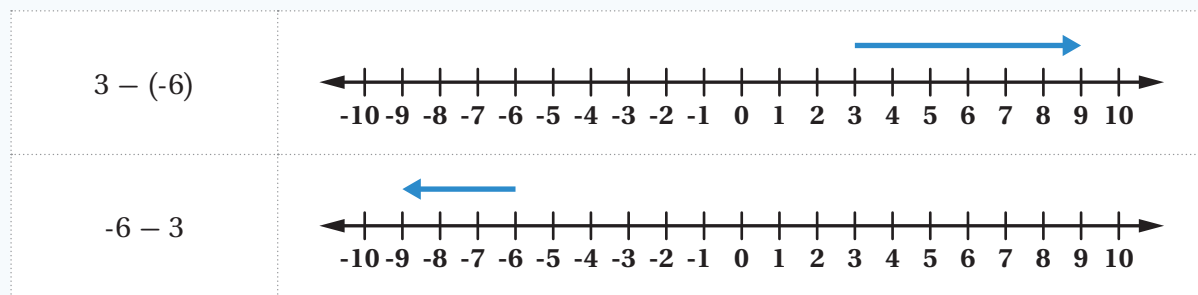
Al determinar la *suma* de los términos de una expresión, el orden de los valores no afecta el resultado final. Este es un ejemplo de la *propiedad conmutativa*.

Para representar una suma en una recta numérica, comienza en uno de los valores y utiliza el otro valor para determinar la dirección y distancia del cambio.



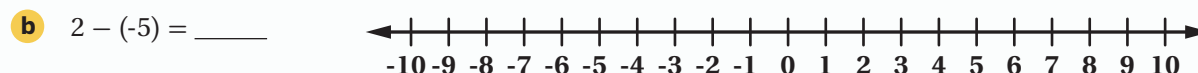
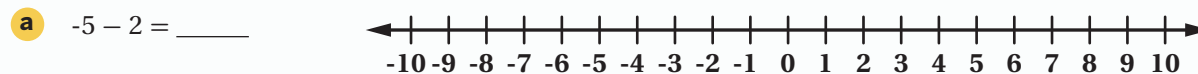
Al determinar la *diferencia*, el orden de los valores de una expresión *sí afecta* el resultado final.

Para representar una resta en una recta numérica, comienza en el primer valor y utiliza el segundo valor para determinar la dirección y distancia del cambio. Si se resta un número positivo, hay que desplazarse a la izquierda; si se resta un número negativo, hay que desplazarse a la derecha.



Prueba a hacer esto

Para cada expresión, completa la recta numérica y determina el valor de la expresión.



Al sumar y restar números enteros, fracciones y decimales, hay varios caminos hacia el mismo valor. Estas son algunas estrategias para sumar y restar números positivos y negativos:

- Imaginar el problema como si se tratara de flotadores y anclas o imaginarlo en una recta numérica.
Por ejemplo, $(-3) + (-4)$ es como empezar con (-3) y añadir 4 anclas o desplazarse 4 hacia la izquierda.
- Reescribir la resta como suma.
Por ejemplo, $-3 - 4$ se puede reescribir como $-3 + (-4)$, que es -7 .
- Combinar números que al sumarse o restarse equivalen a 0.
Por ejemplo, al sumar -5 y 6 , puedes descomponer 6 en $5 + 1$. Aprovechando las propiedades de las operaciones, podemos sumar $-5 + 5 + 1$ por partes. La porción $-5 + 5$ de la expresión equivale a 0 y $0 + 1 = 1$, por lo que el valor final es 1 .

Prueba a hacer esto

Completa los espacios en blanco con los números dados para que las ecuaciones sean verdaderas.

	-		=	11
	+	9	=	

-1	-2	-3	-4
5	6	7	8

Se pueden usar modelos como el de flotadores y anclas para dar sentido a la multiplicación de números enteros. Estos son algunos ejemplos para un submarino que comienza en 0 unidades.

Acción	Representación	Dirección del submarino	Valor final
Añadir 2 grupos de 3 flotadores	$2 \cdot 3$	Sube	6
Quitar 2 grupos de 3 flotadores	$-2 \cdot 3$	Baja	-6
Añadir 2 grupos de 4 anclas	$2 \cdot (-4)$	Baja	-8
Quitar 2 grupos de 4 anclas	$-2 \cdot (-4)$	Sube	8

Prueba a hacer esto

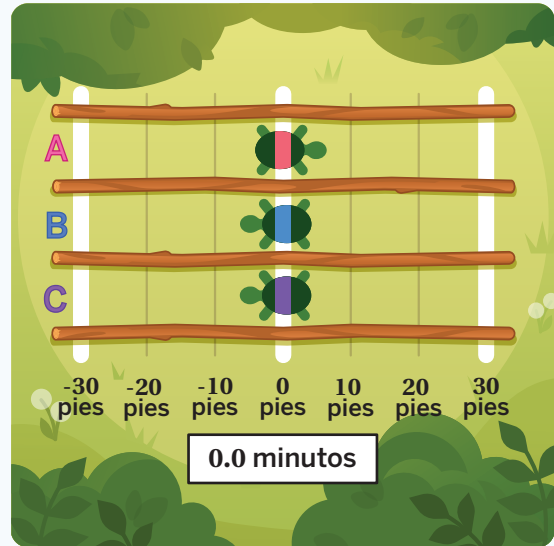
Determina el valor de cada expresión.

Acción	Expresión	Valor
Añadir 3 grupos de 5 anclas	$3 \cdot (-5)$	
Quitar 4 grupos de 6 flotadores	$(-4) \cdot 6$	
Quitar 2 grupos de 7 anclas	$(-2) \cdot (-7)$	

La multiplicación de números positivos y negativos puede ser útil para representar posición, tasa y tiempo. La posición de un objeto es igual al ritmo (o tasa) de marcha multiplicado por el tiempo o $\text{tasa} \cdot \text{tiempo} = \text{cambio en la posición}$.

Aquí hay tres tortugas. Todas están juntas en 0 pies.

- La tortuga A camina hacia la derecha a 6 pies por minuto. Hace 3 minutos, la tortuga A estaba en -18 pies porque $6 \cdot (-3) = -18$.
- La tortuga B camina hacia la izquierda a 5 pies por minuto. Hace 6 minutos, la tortuga B estaba en 30 pies porque $(-5) \cdot (-6) = 30$.
- La tortuga C camina hacia la izquierda a 3 pies por minuto. En 4 minutos, la tortuga C estará en -12 pies porque $(-3) \cdot 4 = -12$.



Prueba a hacer esto

Una tortuga se mueve a una tasa constante.

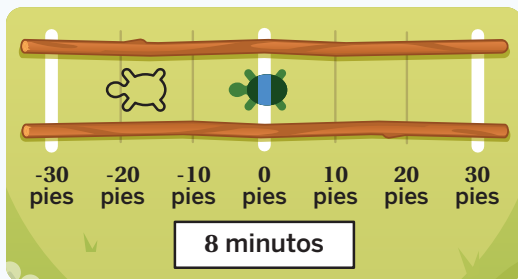
Completa la tabla para mostrar el tiempo y la posición de la tortuga.

Tiempo	Posición
-2	
0	0
1	-4
	-28

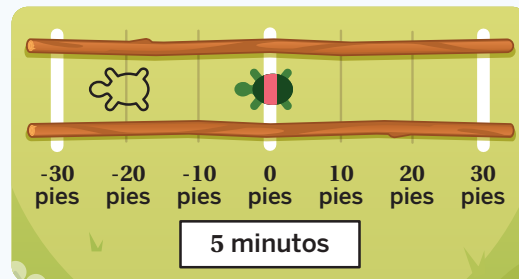
Puedes usar tu conocimiento sobre posición, tasa y tiempo para dividir números positivos y negativos.

Aquí se muestran dos ejemplos.

La tortuga A camina -2 pies por minuto. Si comienza en 0 pies, ¿cuánto tiempo le llevará caminar hasta -16 pies? Dividir la posición entre la tasa de marcha nos da el tiempo, por lo tanto, $\frac{-16}{-2} = 8$ minutos.



La tortuga B tarda 5 minutos en caminar 20 pies hacia la izquierda, o -20 pies. Esto significa que cada minuto, la tortuga B camina -4 pies. Dividir la distancia entre el tiempo nos da la tasa de marcha, por lo que $\frac{-20}{5} = -4$.



Pensar en una expresión en términos de posición, tasa y tiempo puede ayudarte a determinar si el valor es positivo o negativo.

Prueba a hacer esto

Las tortugas A, B y C se mueven a una tasa constante.

Completa la tabla para mostrar la tasa, el tiempo y la posición de cada tortuga.

Tortuga	Tasa (pies/min)	Tiempo (min)	Posición (pies)
A	-3	2.5	
B	-2		-23
C		-2	11

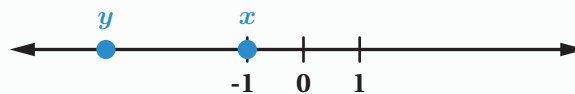
Pensar con flexibilidad te ayudará a razonar sobre los valores de las expresiones con variables. Usar rectas numéricas y probar con valores de ejemplo son dos estrategias que nos pueden ayudar a dar sentido a estos tipos de expresiones algebraicas.

Ciertas cosas que nos son familiares después de haber trabajado con números positivos no son iguales al trabajar con números negativos.

Por ejemplo, cuando x es un número positivo, $10 - x$ será menor que 10. Pero si x es un número negativo, $10 - x$ será mayor que 10, ya que restar un número es como sumar su opuesto.

Prueba a hacer esto

Esta recta numérica muestra las posiciones de x y y .



Ordena las expresiones de *menor a mayor*.

$x - y$

$x \cdot y$

$2x$

--	--	--

Menor

Mayor

Puedes usar las propiedades de las operaciones, el orden de las operaciones y la multiplicación y división de números enteros como estrategias para resolver acertijos de números enteros.

Por ejemplo, si queremos hacer que esta desigualdad sea verdadera, puede ser útil pensar en los signos de la suma dentro del paréntesis y el número fuera del paréntesis.

$-8(-4 + 1) > 0$ es verdadera porque $-8(-3)$ es positivo.

$-8(4 + 1) > 0$ es falsa porque $-8(5)$ es negativo.

Haz que la desigualdad sea verdadera.

$$\dots\dots\dots (-\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) > 0$$

Prueba a hacer esto

Completa los espacios en blanco para formar una expresión con valor negativo.

$$\square \times \square + \square = \square ?$$

La suma y resta de números positivos y negativos puede ser útil para resolver problemas en situaciones del mundo real.

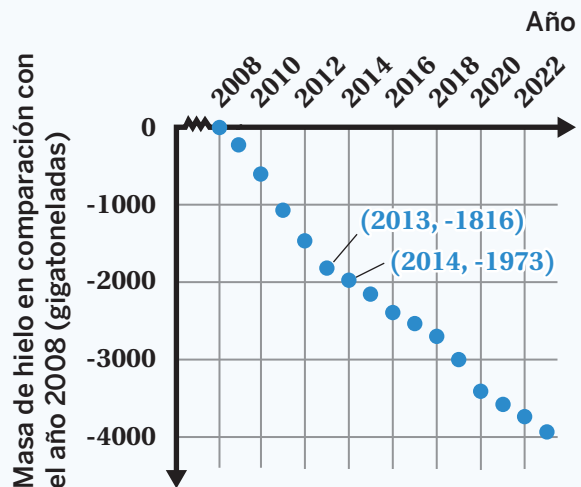
Puede notarse en la gráfica que la masa de hielo de Groenlandia disminuye año tras año. La resta ayuda a determinar cuánto disminuyó entre dos años determinados.

Por ejemplo, para determinar el cambio en la masa de hielo del año 2013 al 2014, hay que hallar la diferencia entre -1,973 y -1,816.

Ya que -1,973 es menor que -1,816, la diferencia será negativa.

$$-1973 - (-1816) = -1973 + 1816 = -157$$

El cambio en la masa de hielo del año 2013 al 2014 es de -157 gigatoneladas. Esta información se puede usar para determinar si la masa de hielo continuará cambiando a la misma tasa en los años venideros o si la masa de hielo está cambiando a una tasa mayor o menor.

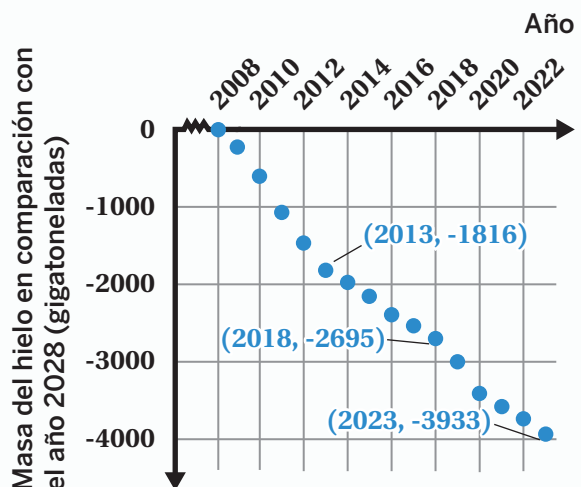


Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la masa de hielo de Groenlandia en diferentes años.

¿Cuál es el cambio aproximado de la masa de hielo de Groenlandia del año 2013 al 2023?

Muestra si el cambio es positivo o negativo.



Analizar los datos sobre el hielo marino y el nivel del mar puede ayudarnos a hacer predicciones sobre cómo estos niveles podrían cambiar en el futuro. Podemos identificar patrones y hacer predicciones restando valores de datos para obtener una tasa y luego extender esa tasa al futuro por medio de la multiplicación.

Para calcular el cambio promedio en el hielo marino de verano por año de 2010 a 2020, se restan las cantidades de hielo marino correspondientes a estos años y luego se divide entre 10.

$$\frac{4158 - 4742}{10} = \frac{-584}{10} = -58.4 \text{ kilómetros cúbicos por año}$$

Para hacer una predicción sobre la cantidad de hielo marino de verano en 2040, multiplica esta tasa por 20 y suma ese valor a la cantidad de hielo marino de 2020.

$$-58.4 \cdot 20 = -1168$$

$$4158 + (-1168) = 2990 \text{ kilómetros cúbicos}$$

Hacer predicciones como esta nos puede ayudar a prepararnos para el efecto futuro que puedan tener los cambios en el hielo marino y el nivel del mar.

Año	Hielo marino de verano (km cúbicos)
1980	16,316
1990	13,815
2000	11,084
2010	4,742
2020	4,158

Prueba a hacer esto

Utiliza la tabla del resumen para responder las preguntas.

- a** ¿Cuál fue el cambio promedio anual del hielo marino de verano entre 1980 y 1990?

Muestra si el cambio es positivo o negativo.

- b** ¿Durante qué década se derritió el hielo más rápido? Muestra o explica tu razonamiento.

Realizar operaciones con números positivos y negativos nos puede ayudar a representar y resolver problemas del mundo real.

Imagina a una familia de 5 cuya huella de carbono actual es de 60.5 toneladas de dióxido de carbono por año. Esta familia decide hallar maneras de reducir su huella de carbono, lo que incluye:

- Instalar paneles solares (-4.4 toneladas de carbono).
- Reciclar desechos (-0.6 toneladas de carbono por persona).
- Compostar los residuos de alimentos (-0.5 toneladas de carbono por persona).

Podemos representar los cambios con esta expresión:

$$60.5 + (-4.4) + 5(-0.6) + 5(-0.5)$$

Implementando estos cambios, esta familia reducirá su huella de carbono a 50.6 toneladas por año.

Prueba a hacer esto

Una empresa de servicios públicos cobra a sus clientes \$0.19 por kilovatio hora de energía que consumen.

También ofrece a los clientes que utilicen paneles solares un crédito de -\$0.17 por cada kilovatio hora de electricidad que generan.

La empresa envió a un cliente esta factura.

Completa los tres valores que faltan.

Factura			
	Kilovatio hora (kWh)	Cargo/ crédito por kWh	Cargo/ crédito total
Electricidad consumida		\$0.19	\$180.50
Electricidad generada		-\$0.17	-\$136.85
Total a pagar			

Lección 1

Posición inicial	Acción	Posición final
-3	Añadir 2 flotadores	-1
-3	Quitar 2 anclas	-1
-3	Añadir 11 flotadores	8
-3	Añadir 3 flotadores o quitar 3 anclas	0
-3	Añadir 4 anclas o quitar 4 flotadores	-7

Lección 2

Posición inicial	Acción	Expresión	Posición final
-2	Añadir 6 flotadores	$-2 + 6$	4
1	Quitar 5 anclas	$1 - (-5)$	6
3	Quitar 7 flotadores	$3 - 7$	-4
-1	Añadir 4 anclas	$-1 + (-4)$	-5

Lección 3

- a** $0.6 + x = -0.8$ (o equivalente)

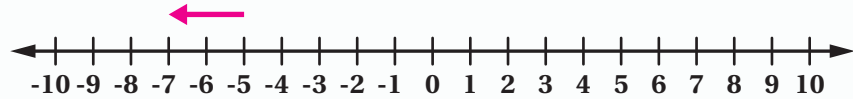
Nota para cuidadores: Una estrategia consiste en 0.6 como la posición inicial, x como el cambio y -0.8 como la posición final.

- b** -1.4

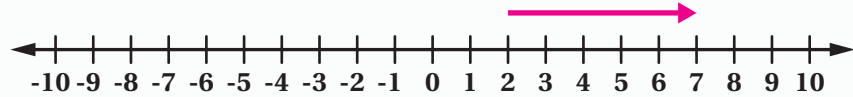
Nota para cuidadores: Esta es una estrategia para calcular el valor del cambio: 0.6 es la posición inicial y -0.8 es la posición final. La distancia de 0.6 a 0 es 0.6, y la distancia de 0 a -0.8 es 0.8, por lo que la distancia total es $0.6 + 0.8 = 1.4$. La flecha que apunta del inicio al final señala hacia la izquierda, lo que indica que el cambio es negativo.

Lección 4

a $-5 - 2 = \underline{-7}$



b $2 - (-5) = \underline{7}$



Lección 5

Las respuestas pueden variar.

7	-	-4	=	11
-3	+	9	=	6

Lección 6

Acción	Expresión	Valor
Añadir 3 grupos de 5 anclas	$3 \cdot (-5)$	-15
Quitar 4 grupos de 6 flotadores	$(-4) \cdot 6$	-24
Quitar 2 grupos de 7 anclas	$(-2) \cdot (-7)$	14

Lección 7

Tiempo	Posición
-2	8
0	0
1	-4
7	-28

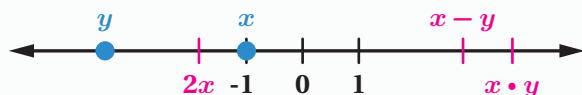
Lección 8

Tortuga	Tasa (pies/min)	Tiempo (min)	Posición (pies)
A	-3	2.5	-7.5
B	-2	11.5	-23
C	-5.5	-2	11

Nota para cuidadores: Una estrategia para calcular el tiempo o la tasa consiste en dividir la posición por el valor conocido. Por ejemplo, si la tasa es -2 y la posición es -23, puedes determinar el tiempo calculando $\frac{-23}{-2} = 11.5$.

Lección 9

$2x$	$x - y$	$x \cdot y$
Menor		Mayor



Nota para cuidadores:

- Como x es igual a -1, $2x = 2 \cdot (-1) = -2$.
- Tanto x como y están a la izquierda de 0, por lo que ambos son negativos. Restar un negativo es como quitar anclas, lo que mueve el submarino hacia arriba en dirección positiva. Para restar $x - y$, empieza en x (-1) y muévete en la dirección positiva por la distancia entre y y 0.
- Como $x = -1$, al multiplicar $x \cdot y$ se obtendrá un número opuesto a y , que es 1 más que $x - y$.

Lección 10

Las respuestas pueden variar.

$$\boxed{-6} \times \boxed{8} + \boxed{-2} = \boxed{-50}$$

Nota para cuidadores: Una estrategia para formar una expresión con valor negativo consiste en multiplicar números con signos opuestos y sumar luego un número que también sea negativo.

Lección 11

-2,117 gigatoneladas. Como -3,933 es menor que -1,816, el cambio es negativo y $-3933 - (-1816) = -3933 + 1816 = -2117$.

Lección 12

- a -250.1 kilómetros cúbicos por año
- b 2000 a 2010. Las explicaciones pueden variar. Una estrategia consiste en hacer estimaciones.
De 2000 a 2010, la cantidad de hielo disminuyó en al menos 6,000 kilómetros cúbicos ($11084 - 4742 > 6000$). Durante las demás décadas, la cantidad de hielo disminuyó en menos de 3,000 kilómetros cúbicos.

Lección 13

Factura			
	Kilovatio hora (kWh)	Cargo/ crédito por kWh	Cargo/ crédito total
Electricidad consumida	950	\$0.19	\$180.50
Electricidad generada	805	-\$0.17	-\$136.85
Total a pagar			\$43.65