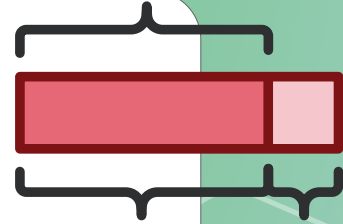


Unidad **4**

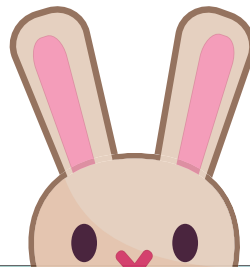


Relaciones proporcionales y porcentajes

En esta unidad, aprenderás qué sucede cuando una cantidad cambia por un determinado porcentaje. Además, usarás diagramas de cinta, tablas, rectas numéricas dobles y ecuaciones para resolver relaciones proporcionales que incluyen cambios porcentuales y cantidades fraccionarias.

Preguntas esenciales

- ¿Cómo se relacionan los porcentajes y las fracciones con las relaciones proporcionales?
- ¿De qué manera las relaciones proporcionales y los porcentajes representan cambios en el mundo real?

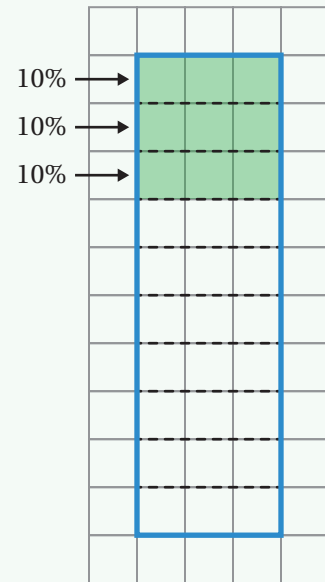


Al determinar el porcentaje de una región que está coloreada:

- Crea una fracción contando el número de unidades coloreadas (parte) como el numerador y el número total de unidades (todo) como el denominador.
- Divide la parte entre el todo y luego convierte a porcentaje multiplicando por 100.

Al calcular el porcentaje de un número:

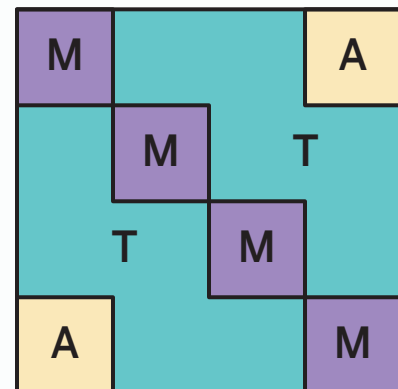
- Multiplica el porcentaje, escrito como decimal o fracción, por el todo, o
- Divide una cuadrícula en grupos iguales como ayuda para determinar la parte. Por ejemplo, al determinar 30% de 30, se descompone 30 en 10 grupos de 3, donde cada uno de ellos representa el 10%. Para el 30%, se necesitarían 3 grupos de 3, o sea, 9.



Prueba a hacer esto

¿Qué porcentaje de este cuadrado está coloreado de cada color?

Color	Porcentaje (%)
Morado M	
Turquesa T	
Amarillo A	



Los diagramas de cinta y las tablas nos pueden ayudar a interpretar problemas que incluyen aumento porcentual y disminución porcentual.

Los términos *aumento porcentual* y *disminución porcentual* describen un aumento o disminución de una cantidad como un porcentaje de la cantidad inicial.

Uno de los métodos para resolver este tipo de problemas es comenzar con la cantidad inicial y luego sumar o restar la cantidad que coincide con el porcentaje de aumento o disminución.

Prueba a hacer esto

Habib tiene un puesto de comida en el parque. La semana pasada vendió 80 botellas de agua.

El número de botellas de agua que vendió aumentó un 75% esta semana.

¿Cuántas botellas de agua vendió esta semana?

Crea una tabla o un diagrama de cinta si te ayuda con tu razonamiento.

Podemos usar ecuaciones como ayuda para interpretar situaciones que incluyen un *aumento porcentual* o una *disminución porcentual*.

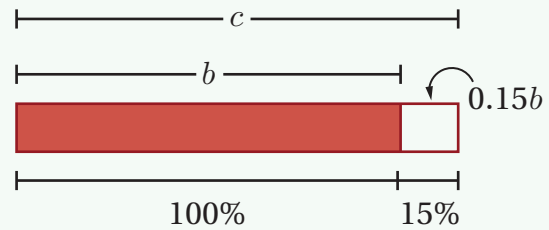
Por ejemplo, c es 15% más que b .

Se pueden escribir tres ecuaciones para modelar la relación entre b y c :

$$c = b + 0.15b$$

$$c = (1 + 0.15)b$$

$$c = 1.15b$$



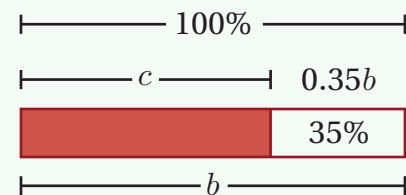
En este ejemplo, c es 35% menos que b .

Se pueden escribir tres ecuaciones para modelar la relación entre b y c :

$$c = b - 0.35b$$

$$c = (1 - 0.35)b$$

$$c = 0.65b$$



Prueba a hacer esto

El espacio de almacenamiento disponible en la computadora de Martina disminuyó un 3% esta semana.

Escribe una ecuación para representar la cantidad de espacio de almacenamiento que tenía la semana pasada, b , y la cantidad que tiene esta semana, c .

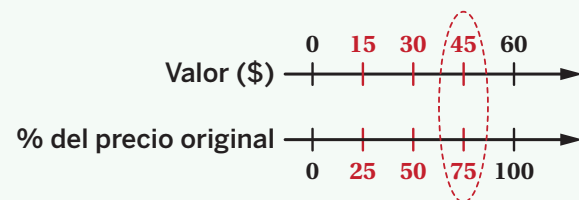
Un diagrama de recta numérica doble es una herramienta útil para entender problemas con cambios porcentuales.

Al usar rectas numéricas dobles, es útil comenzar por identificar cuál valor coincide con cuál porcentaje. Puede ser útil también pensar en los valores como una cantidad nueva y una cantidad inicial, o vieja.

Una vez que los valores y porcentajes que se conocen estén alineados, completar otros valores en ambas rectas numéricas puede ayudar a resolver el problema. En el caso de problemas con porcentajes, los 0 de cada recta numérica deben estar alineados.

Ejemplo:

Una mueblería ofrece un 25% de descuento por cada mueble para hacer sitio en el almacén. Si normalmente una silla se vende por \$60, ¿cuál es su precio en oferta?



Prueba a hacer esto

Una bebida deportiva contiene 40% menos azúcar que antes. La bebida ahora contiene 18 gramos de azúcar.

- ¿Cuánta azúcar contenía originalmente la bebida?
- Usa una recta numérica doble para representar esta situación.

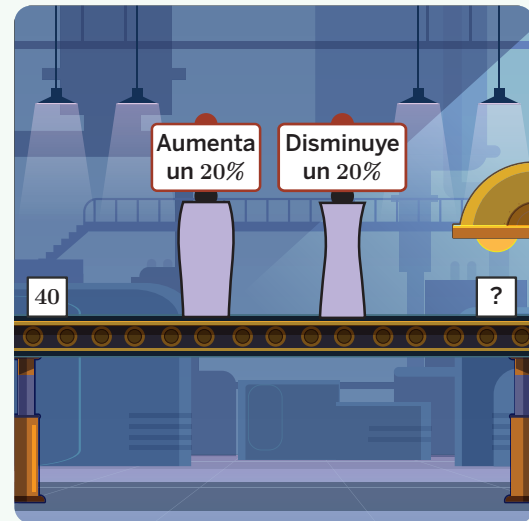
Las máquinas de porcentajes toman un valor de entrada y aumentan o disminuyen ese valor en un porcentaje determinado para producir el valor de salida.

Aumentar y luego disminuir por el mismo porcentaje no producirá el valor inicial de la entrada.

Por ejemplo:

- Un valor de entrada de 40 se aumenta un 20%.
 $40 \cdot 1.2 = 48$ o bien, $40 \cdot 0.2 + 40 = 48$
- El nuevo valor se disminuye un 20%.
 $48 \cdot 0.8 = 38.4$ o bien, $48 - (48 \cdot 0.2) = 38.4$

¡Puede ser que te sorprenda descubrir que el resultado final *no* es el valor inicial de la entrada, 40! Esto se debe a que el valor de entrada representa el todo cuando se determina un 20% de 40. Pero en el segundo cálculo, el valor de entrada cambia. Ahora se está determinando un 20% de 48 y luego se resta ese valor de 48.



Prueba a hacer esto

Un número aumenta un 30%. El número nuevo es 26.

¿Cuál era el número original?

Usa un diagrama de cinta, una recta numérica doble o una tabla para mostrar tu razonamiento.

En general, los precios aumentan con el tiempo, pero *cuánto* aumentan es importante. Cantidades en dólares y cambios porcentuales son dos maneras de describir aumentos de precio. Los porcentajes son más útiles cuando se comparan cambios de precio de dos o más cosas distintas. Analicemos el precio de los plátanos y la carne de res molida.

Una manera de calcular el aumento porcentual del precio de cada artículo es dividir el precio nuevo entre el precio viejo.

- Plátanos: $\frac{0.63}{0.50} = 1.26$. Esto significa 126%, o sea, un aumento del 26%.
- Carne de res molida: $\frac{5.21}{2.56} = 2.04$. Esto significa 204%, o sea, un aumento del 104%.

Año	Libra de plátanos	Libra de carne de res molida
2004	\$0.50	\$2.56
2024	\$0.63	\$5.21

Durante este período, el precio de los dos artículos aumentó, pero el precio de la carne de res molida aumentó muchísimo más que el precio de los plátanos.

Puede ser útil ver cómo los precios cambian con el tiempo en relación con los ingresos de las personas. El salario mínimo federal es un ejemplo de medida de los ingresos. De 2004 a 2024, el salario mínimo cambió de \$5.15 a \$7.25, lo cual representa un 41% de aumento. Esto significa que para alguien que gana el salario mínimo en 2004 y 2024, los plátanos parecerían haberse vuelto más baratos con el tiempo, mientras que la carne de res molida parecería haberse vuelto más cara.

Prueba a hacer esto

Esta es una tabla con el salario y el costo del alquiler de Annika en dos años diferentes.

- a** ¿En qué porcentaje aumentó el salario de Annika del 2012 al 2022?

Año	Salario (\$ por hora)	Alquiler mensual (\$)
2012	12.50	550
2022	18.75	

- b** El costo del alquiler de Annika aumentó un 220% del 2012 al 2022. Completa la tabla.

El precio que se publica y el total que paga el cliente suelen ser cantidades distintas. Impuestos, propina y descuentos son algunas de las razones por las que el precio publicado y el precio final son diferentes.

Estos cambios suelen calcularse como porcentajes del precio publicado.

Por ejemplo, una propina es una cantidad de dinero que una persona le da a alguien que brinda un servicio, como camareros en restaurantes, peluqueros y personas que entregan a domicilio. Si una persona planea dejar un 20% de propina, el costo total con propina incluida será un 120% de la cuenta.

Prueba a hacer esto

Imani tiene un cupón de 25% de descuento para un sombrero.

- a** Determina el precio del sombrero antes del impuesto.
- b** El impuesto sobre las ventas en el estado de Imani es del 6%.

¿Cuál fue el monto total que Imani gastó, incluyendo el impuesto?

Precio:	\$14.00
Cupón del 25%:	\$
Subtotal:	\$
6% de impuesto:	\$
Total:	\$

Existen dos tipos distintos de salario mínimo federal, uno para los trabajadores que reciben propinas y otro para los que no.

En el caso de los trabajadores que reciben propina, como los meseros de restaurantes, el pago que reciben depende no solo de la tarifa por hora y del número de horas que trabajen, sino también del número de mesas que atiendan, la cuenta promedio de esas mesas y el porcentaje promedio, en propinas, que se obtiene de esas mesas.

Supongamos que el mesero de un restaurante gana \$2.13 por hora y trabaja 30 horas por semana. Atiende alrededor de 40 mesas en una semana, donde la cuenta típica es \$75 y la propina es del 18%. Esta es una ecuación que muestra cuánto gana este mesero en una semana típica:

$$2.13 \cdot 30 + 40 \cdot 75 \cdot 0.18 = \$603.90$$

Se puede comparar esta cantidad con otras formas de pagar a los meseros, tales como una tarifa simple de \$15 por hora ($15 \cdot 30 = \450 en una semana) sin propinas. Cambiar a este método significaría una disminución del 25% en el salario del mesero de restaurante de nuestro ejemplo porque $\frac{603.90 - 450}{603.90} \approx 0.2548$.

Prueba a hacer esto

Demetrius trabaja de mesero en un restaurante. En una semana de trabajo promedio de 40 horas, atiende 60 mesas con una cuenta promedio de \$28 por mesa. Típicamente recibe un 20% de propina en cada cuenta y gana \$2.13 por hora.

- a** ¿Cuánto dinero gana Demetrius en una semana típica?
- b** Supongamos que la propina típica disminuye al 18% de la cuenta. ¿En qué porcentaje disminuirían las ganancias de Demetrius? Muestra o explica tu razonamiento.

Porcentaje de error es una forma de describir la diferencia entre un valor deseado y el valor real, expresada como un porcentaje del valor deseado.

Por ejemplo, un cartón de leche debería contener 16 onzas líquidas, pero solo contiene 15 onzas líquidas.

- El error es 1 onza líquida.
- El porcentaje de error es 6.25% porque $\frac{1}{16} \cdot 100 = 6.25$.

Para determinar el porcentaje de error, la cantidad del error se compara con el valor deseado. Se puede usar esta fórmula:

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{(\text{diferencia entre valor real y valor deseado})}{\text{valor deseado}} \cdot 100$$

En algunos casos, no hay un valor “deseado” claro. En tales casos, el denominador es el valor que no tiene error. Estos son algunos ejemplos:

- Para un termómetro que indica 73° , si la temperatura real es 70° , el porcentaje de error para la lectura de ese termómetro es $\frac{3}{70}$, o 4.3%.
- Para una estimación de 800 frijolitos de jalea en un recipiente, si el recipiente en realidad contiene 947 frijolitos, el porcentaje de error de la estimación es de $\frac{147}{947}$, o 15.5%.

Prueba a hacer esto

Anushka hace pulseras para vender en una tienda infantil. Una pulsera de tamaño infantil debe medir 14 centímetros de largo. Si una pulsera es más de un 15% más larga o más corta, debe ser corregida.

- ¿Cuál es la longitud máxima de pulsera que Anushka puede hacer para que se considere de tamaño infantil?
- Si Anushka hace una pulsera de 12 centímetros de largo, ¿necesitará corregirla?

Muestra o explica tu razonamiento.

Las situaciones que incluyen aumentos o disminuciones porcentuales están por todas partes en la sociedad.

Por ejemplo, los artículos de noticias con frecuencia contienen hechos y estadísticas sobre la contaminación, tales como:

En 2019, los EE. UU. generaron 72.8 millones de toneladas de desechos plásticos.
Esto fue un 55% más de desechos que en el año 2000.

Este tipo de información puede emplearse para generar preguntas interesantes. Al escribir este tipo de preguntas, es importante usar un lenguaje preciso. Podríamos preguntar: *¿Qué cantidad de desechos había en el año 2000?* Pero una pregunta más precisa podría ser: *¿Cuántas toneladas de desechos plásticos generaron los EE. UU. en el año 2000?*

Podemos usar estrategias de esta unidad, como ecuaciones, rectas numéricas dobles, tablas y diagramas de cinta para responder este tipo de preguntas.

Prueba a hacer esto

Aquí se muestra un extracto del resumen con información sobre contaminación.

En 2019, los EE. UU. generaron 72.8 millones de toneladas de desechos plásticos.
Esto fue un 55% más de desechos que en el año 2000.

a ¿Cuántas toneladas de desechos plásticos generaron los EE. UU. en el año 2000?

b Plantea otra pregunta sobre este tema que te interesaría responder.

Cuando un problema implica una relación proporcional, puede ser útil determinar la constante de proporcionalidad o el factor de escala.

Esta relación puede observarse entre las columnas de esta tabla. Las alturas se multiplican por $2\frac{1}{2}$ para obtener los anchos.

Cuando se multiplica una cantidad en una relación proporcional por un valor, la otra cantidad cambiará por el mismo factor, independientemente de que los valores sean números naturales o no.

Esta relación puede observarse entre las filas de la tabla. Cuando la altura se multiplica por $1\frac{3}{4}$, el ancho se multiplica por el mismo número.

Altura (pulg.)	Ancho (pulg.)
2	5
$3\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$

Altura (pulg.)	Ancho (pulg.)
2	5
$3\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$

Prueba a hacer esto

Hamza quiere crear prendedores para ropa que sean una copia a escala de su diseño original.

Los prendedores tendrán $\frac{4}{5}$ de pulgada de alto. Completa la tabla para mostrar el ancho de sus prendedores.

	Altura (pulg.)	Ancho (pulg.)
Diseño	2	5
Prendedor		

Las relaciones proporcionales pueden tener cantidades fraccionarias. Para resolver problemas con fracciones se pueden usar las mismas estrategias que se usan para resolver problemas con números naturales.

- Para determinar la constante de proporcionalidad dentro de una receta, se divide la cantidad de un ingrediente determinado entre el número de porciones.
- Las constantes de proporcionalidad pueden ser útiles para comparar relaciones proporcionales con cantidades fraccionarias.

Esta es una receta de pan de plátano. Para averiguar la cantidad de azúcar por porción, divide $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar por 6 porciones. Esto da $\frac{3}{4} \div 6$, o sea, $\frac{1}{8}$ de taza de azúcar por porción.

Receta de pan de plátano

Cantidad de porciones: 6

- 2 libras de plátanos
- $\frac{1}{2}$ taza de mantequilla
- $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar
- $2\frac{1}{2}$ tazas de harina
- 1 cucharadita de bicarbonato de sodio

Prueba a hacer esto

Kwasi está preparando pan de plátano.

Quiere hacer un pan más grande para servir a 10 personas.
¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitará?

Muestra o explica tu razonamiento.

La receta de Kwasi

Porciones: 6

- 2 libras de plátanos
- $\frac{1}{2}$ taza de mantequilla
- $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar
- $2\frac{1}{2}$ tazas de harina
- 1 cucharadita de bicarbonato de sodio

La división larga se puede usar para representar fracciones como decimales. A veces, un decimal es un **decimal exacto**, que significa que termina. Otras veces, un decimal es un **decimal periódico**, en el que uno o más de sus dígitos (no todos ellos ceros) se repiten indefinidamente. Un decimal periódico puede escribirse usando la raya indicadora de decimales periódicos (vinculum) encima de los dígitos que se repiten o con puntos suspensivos (...) al final.

Ejemplos

$$\frac{1}{3} = 0.333 \dots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{14}{99} = 0.14141414 \dots = 0.\overline{14}$$

$$\frac{53}{90} = 0.5888 \dots = 0.5\overline{8}$$

Recuerda que la raya va *únicamente* sobre el dígito o los dígitos que se repiten.

Prueba a hacer esto

Usa la división larga para escribir cada número como decimal. Luego determina si cada decimal es exacto o periódico. Explica cómo lo sabes.

a $\frac{7}{8}$

b $\frac{2}{3}$

Lección 1

Color	Porcentaje (%)
Morado M	25
Turquesa T	62.5
Amarillo A	12.5

Nota para cuidadores: Esta es una estrategia para determinar el porcentaje que está coloreado en morado: dado que 4 cuadrados son morados y hay 16 cuadrados en total, escribe la fracción $\frac{4}{16}$ y divide $4 \div 16 = 0.25$. Multiplica por 100 para obtener 25%.

Lección 2

140 botellas de agua.

Nota para cuidadores: Una estrategia es comenzar con la cantidad inicial, 80 botellas de agua, y luego calcular el 75% de esa cantidad. El 75% de 80 es 60 ($0.75 \cdot 80 = 60$). Como se trata de un aumento, suma esa cantidad a la inicial. $80 + 60 = 140$ botellas de agua.

Lección 3

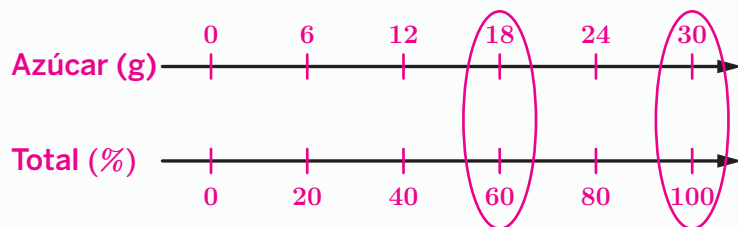
Las respuestas pueden variar.

- $c = b - 0.03b$
- $c = (1 - 0.03)b$
- $c = 0.97b$

Lección 4

a 30 gramos de azúcar

b



Lección 5

20. Los trabajos pueden variar. Nota para cuidadores: Una estrategia para determinar la cantidad inicial es crear una tabla y usar la constante de proporcionalidad.

Entrada	Salida
100%	130%
	$\times 1.30$
20	26
	$\div 1.30$

Lección 6

a 50%.

Nota para cuidadores: Esta es una forma de calcular el aumento porcentual de los salarios: $\frac{18.75}{12.50} = 1.50$. Esto significa 150%, o un aumento del 50%.

b

Año	Salario (\$ por hora)	Alquiler mensual (\$)
2012	12.50	550
2022	18.75	1,210

Nota para cuidadores: Esta es una forma de determinar la cantidad faltante: $220\% = 2.20$. Para calcular el 220% de 550, multiplica $550 \cdot 2.2 = 1210$.

Lección 7

a \$10.50

b \$11.13

Lección 8

a \$421.20. $(40 \cdot 2.13) + (60 \cdot 28 \cdot 0.2) = \421.20

b 8%. Las explicaciones pueden variar. $(40 \cdot 2.13) + (60 \cdot 28 \cdot 0.18) = \387.60 . $\frac{387.60}{421.20} \approx 0.92$, por lo que las nuevas ganancias son un 92% de las originales. Esto representa una disminución del 8%.

Lección 9

- a** 16.1 centímetros.

Nota para cuidadores: Una estrategia para determinar un máximo es multiplicar la longitud deseada por el porcentaje de error más el 100%. $14 \cdot 1.15 = 16.1$, por lo que esa es la longitud máxima que puede tener una pulsera sin tener que corregirla.

- b** No. Las respuestas pueden variar. Las pulseras pueden ser hasta un 15% más cortas, o un $100\% - 15\% = 85\%$ de la longitud deseada. El 85% de 14 es $14 \cdot 0.85 = 11.9$. 12 centímetros es mayor que 11.9 centímetros, lo que significa que la pulsera está dentro de los límites aceptables.

Lección 10

- a** Alrededor de 47 millones de toneladas. 72.8 millones de toneladas es un 55% más que la cantidad en el año 2000.

Nota para cuidadores: Una estrategia para hallar la cantidad inicial es dividir $\frac{72.8}{1.55} \approx 47$.

- b** Las respuestas pueden variar.

- ¿Cuántas toneladas de desechos plásticos generaron los EE. UU. el año pasado?
- ¿En qué porcentaje cambió la cantidad de desechos plásticos entre el año 2000 y el año pasado?

Lección 11

	Altura (pulg.)	Ancho (pulg.)
Diseño	2	5
Prendedor	$\frac{4}{5}$	2

Lección 12

$3\frac{1}{3}$ libras de plátanos

$\frac{5}{6}$ de taza de mantequilla

$1\frac{1}{4}$ tazas de azúcar

$4\frac{1}{6}$ tazas de harina

$1\frac{2}{3}$ cucharaditas de bicarbonato de sodio

Las explicaciones pueden variar. Una estrategia es multiplicar cada cantidad inicial por $\frac{10}{6}$.

Por ejemplo, para determinar la nueva cantidad de mantequilla, multiplica

$$2 \cdot \frac{10}{6} = \frac{20}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ tazas.}$$

Lección 13

a

$$\begin{array}{r} 0.875 \\ 8 \overline{) 7.000} \\ \underline{64} \downarrow \\ 60 \downarrow \\ \underline{56} \downarrow \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Exacto. *Las explicaciones pueden variar.*
Este decimal se termina y no se repite.

b

$$\begin{array}{r} 0.666 \\ 3 \overline{) 2.000} \\ \underline{18} \downarrow \\ 20 \downarrow \\ \underline{18} \downarrow \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

Periódico. *Las explicaciones pueden variar.*
Este decimal continuará indefinidamente en un patrón de números seis.