Unidad 1

Área y área de superficie

El área de la figura es la cantidad de espacio que cubre la figura. Ya conoces los nombres de muchas figuras bidimensionales y tridimensionales y has calculado las áreas de rectángulos.

¿Cómo puedes usar lo que has aprendido para cubrir otras figuras bidimensionales? ¿Y qué significa cubrir una figura tridimensional?

Preguntas esenciales

- ¿Qué significa que dos figuras tengan la misma área?
- ¿Cómo se relacionan las áreas de los rectángulos, paralelogramos y triángulos?
- ¿Cómo se relaciona el área de superficie de los poliedros con el área de los polígonos?

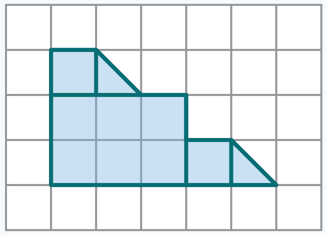
Resumen | Lección 1

El **área** mide el espacio dentro de una figura bidimensional y se expresa en unidades cuadradas.

Estas son dos posibles estrategias para determinar el área de la misma figura:

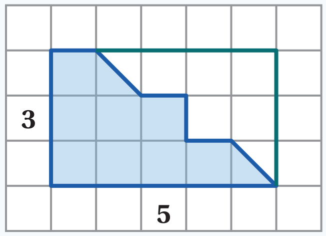
Dividir la figura en rectángulos y triángulos sin que se solapen.

Podemos dividir esta figura en un rectángulo de 2 por 3, dos cuadrados unitarios y dos triángulos para calcular un área de $6 + 2 + 0.5 + 0.5 = 9$ unidades cuadradas.



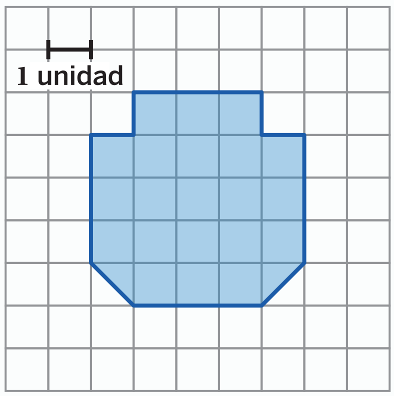
Dibujar un rectángulo alrededor de la figura y restar el espacio vacío.

Podemos dibujar un rectángulo de 3 por 5 alrededor de esta figura y restar los cuadrados vacíos para calcular un área de $15 - 6 = 9$ unidades cuadradas.



Prueba a hacer esto

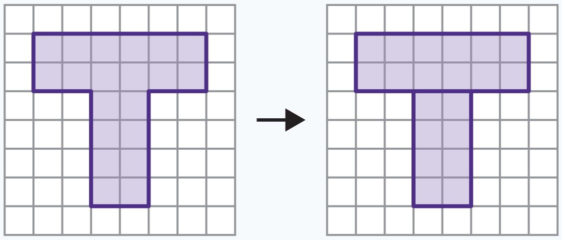
Determina el área de la figura. Muestra o explica tu razonamiento.



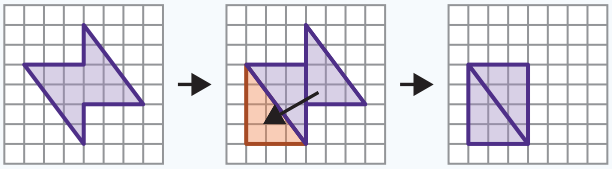
Resumen | Lección 2

Podemos usar figuras como rectángulos, cuadrados y triángulos como ayuda para determinar el área de figuras más complejas. Se hace así:

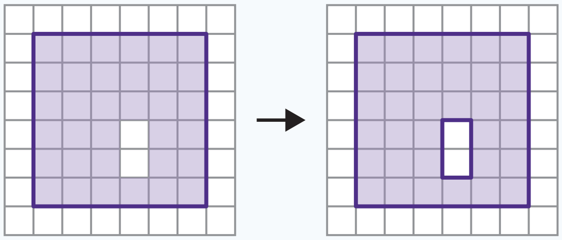
- Descompón la figura en dos o más figuras más pequeñas que tengan áreas que sepas calcular.
- Suma las áreas de las figuras pequeñas.



- Descompón la figura y reorganiza las piezas para formar una o más figuras que tengan áreas que sepas calcular.
- Calcula el área de la figura o las figuras nuevas y menos complejas.

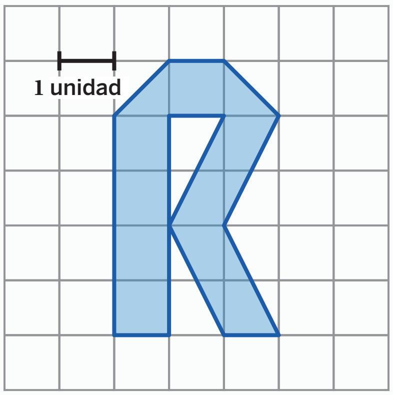


- Si la figura tiene áreas vacías dentro, determina el área como si fuese una figura completa.
- Calcula el área del espacio vacío y réstalo del área total.



Prueba a hacer esto

Determina el área de la figura. Muestra o explica tu razonamiento.



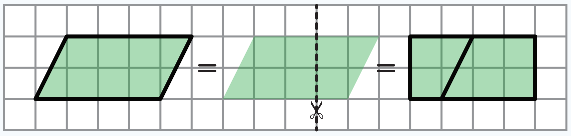
Resumen | Lección 3

Un *cuadrilátero* es cualquier figura que tenga cuatro lados. Un **paralelogramo** es un tipo de cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, como los rectángulos y los cuadrados.

Se pueden usar diferentes estrategias para determinar el área de un paralelogramo.

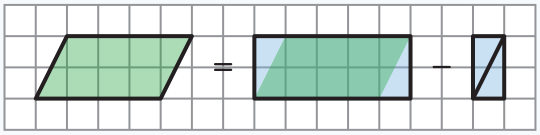
Cortar el paralelogramo en dos piezas y reorganizar las piezas para formar un rectángulo.

El área del paralelogramo es igual al área del rectángulo.



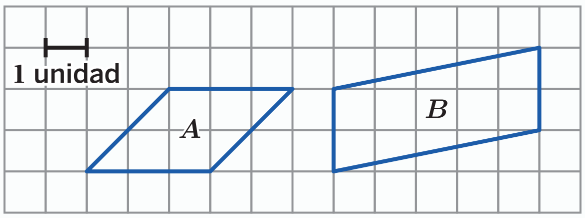
Dibujar un rectángulo alrededor del paralelogramo de modo que incluya dos triángulos rectángulos. Reorganizar los dos triángulos para formar un rectángulo más pequeño.

El área del paralelogramo es igual a la diferencia entre las áreas del rectángulo mayor y el rectángulo menor.



Prueba a hacer esto

Aquí se muestran dos paralelogramos.



a Determinemos el área del paralelogramo A.

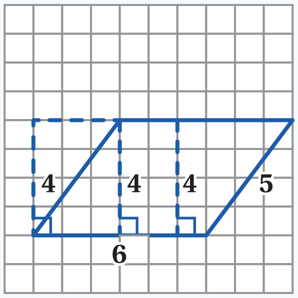
b Determinemos el área del paralelogramo B.

Resumen | Lección 4

Podemos determinar el área de un paralelogramo multiplicando la longitud de su **base** por la longitud de su **altura**. Para determinar el área de un paralelogramo, elige un lado cualquiera para que sea su base. A continuación, multiplica la longitud de la base por la altura. La altura de un paralelogramo es la distancia *perpendicular* entre un punto en la base y su lado opuesto. La altura suele mostrarse con una línea discontinua.

A veces, la línea discontinua que representa la altura queda *fuera* del paralelogramo, según la parte de la base desde la que se mida.

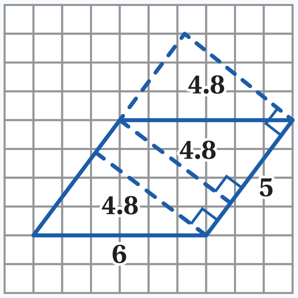
A continuación se muestra un ejemplo del mismo paralelogramo con diferentes lados seleccionados como base y diferentes puntos utilizados para medir la altura. No importa qué conjunto de medidas utilices, la superficie es la misma.



Área = base • altura

$A = 6 \cdot 4$

$A = 24$ unidades cuadradas



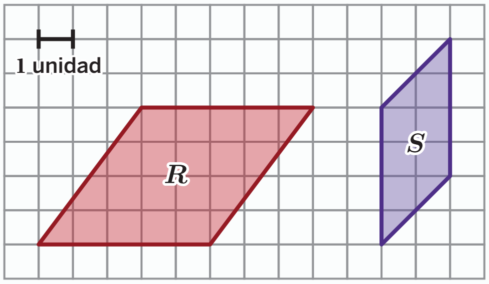
Área = base • altura

$A = 5 \cdot 4.8$

$A = 24$ unidades cuadradas

Prueba a hacer esto

Aquí se muestran dos paralelogramos. R y S. Completa la tabla con sus bases, alturas y áreas.

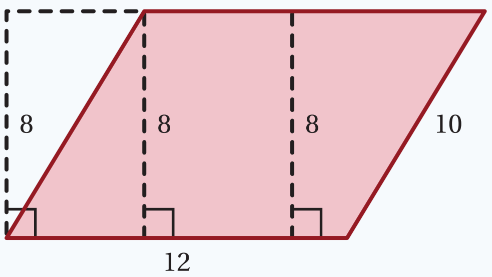


Paralelogramo	Base (unidades)	Altura (unidades)	Área (unidades cuadradas)
R			
S			

Resumen | Lección 5

Podemos usar una regla para determinar las longitudes de la base y la altura de un paralelogramo cuando este no se presenta en una cuadrícula con longitudes que podamos contar. Independientemente del lado del paralelogramo que se elija como base, su área será igual al producto de la longitud de la base y la longitud de su altura correspondiente.

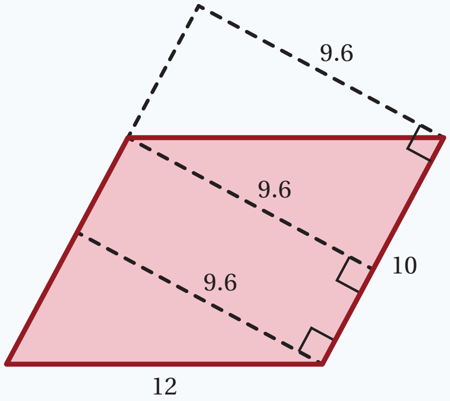
A continuación se muestra un ejemplo del mismo paralelogramo con diferentes lados seleccionados como base y diferentes puntos utilizados para medir la altura. Cada par de medidas producirá la misma área.



Área = base • altura

$A = 12 \cdot 8$

$A = 96$ unidades cuadradas



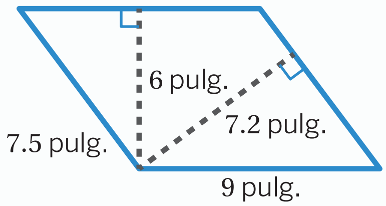
Área = base • altura

$A = 10 \cdot 9.6$

$A = 96$ unidades cuadradas

Prueba a hacer esto

Andrea y Elena están estudiando este paralelogramo.



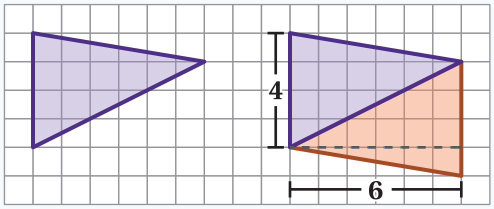
a Andrea dice que 9 pulgadas es la base y 6 pulgadas es la altura. Elena dice que 7.5 pulgadas es la base y 7.2 pulgadas es la altura.

¿Con quién estás de acuerdo? Explica tu razonamiento.

b Calcula el área del paralelogramo.

Puedes aplicar lo que sabes sobre el área de cuadriláteros para determinar el área de triángulos. Estas son dos maneras en que puedes usar una cuadrícula para hacerlo.

Estrategia 1

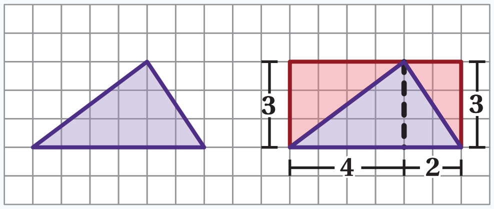


- Haz una copia del triángulo y reorganiza los dos triángulos para formar un paralelogramo.
- Determina el área del paralelogramo multiplicando su base por su altura.

  $4 \cdot 6 = 24$ unidades cuadradas

- El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo. $\frac{24}{2} = 12$ unidades cuadradas

Estrategia 2



- Dibuja un rectángulo alrededor del triángulo.
- Corta el rectángulo en dos rectángulos más pequeños. Esto también corta el triángulo en dos triángulos más pequeños.
- Determina el área de cada rectángulo.

  $4 \cdot 3 = 12$ unidades cuadradas

  $2 \cdot 3 = 6$ unidades cuadradas

- El área de cada triángulo es la mitad del área de su rectángulo correspondiente.

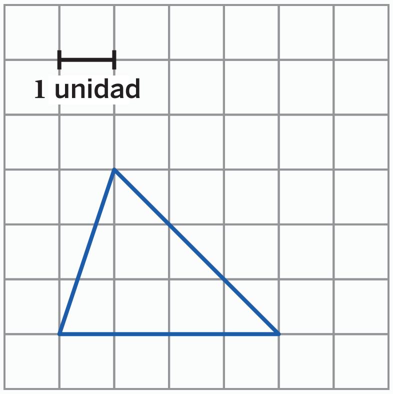
  $\frac{12}{2} = 6$ unidades cuadradas

  $\frac{6}{2} = 3$ unidades cuadradas

- Suma las dos áreas triangulares más pequeñas. $6 + 3 = 9$ unidades cuadradas

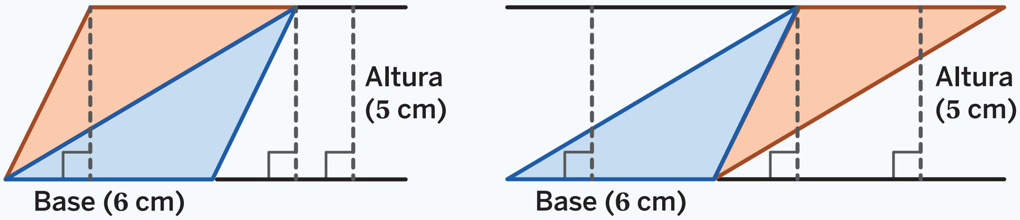
Prueba a hacer esto

Determina el área de este triángulo. Muestra o explica tu razonamiento.



Puedes colocar dos copias idénticas de cualquier triángulo de varias maneras para formar un paralelogramo con las mismas medidas de base y altura. Esto nos demuestra que el área de un triángulo es igual a la mitad del área de su paralelogramo afín.

A continuación se muestran dos maneras de formar un paralelogramo utilizando dos triángulos idénticos con una base de 6 centímetros y una altura de 5 centímetros.



El área del paralelogramo es $A = 6 \cdot 5 = 30$ centímetros cuadrados. Dado que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, el área del triángulo es de 15 centímetros cuadrados. En general, la fórmula del área de un triángulo es Área $= \frac{1}{2} \cdot$ base $\cdot$ altura.

Prueba a hacer esto

Aquí hay tres figuras. Completa la tabla con la base, la altura y el área de cada figura.

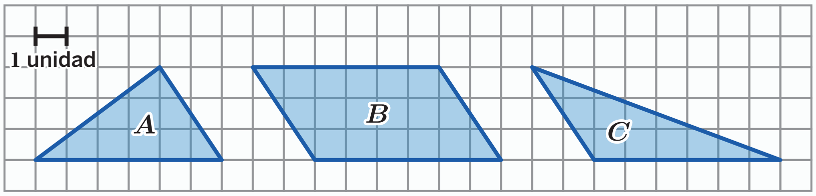
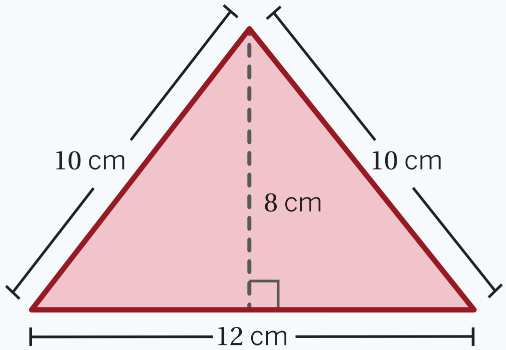


Figura	Base (unidades)	Altura (unidades)	Área (unidades cuadradas)
A			
B			
C			

Resumen | Lección 8

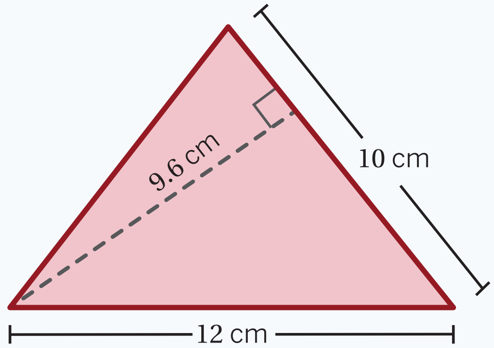
El área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto de su base y altura. Puedes seleccionar cualquier lado del triángulo para que represente la base. La altura de un triángulo es la distancia perpendicular entre un punto de la base y la esquina opuesta del triángulo. La altura suele mostrarse con una línea discontinua.



$A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}(12)(8)$

$A = 48$ centímetros cuadrados



$A = \frac{1}{2}bh$

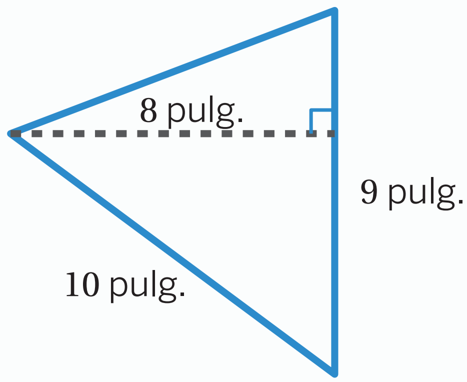
$A = \frac{1}{2}(10)(9.6)$

$A = 48$ centímetros cuadrados

Todos los lados del triángulo pueden ser una base, pero algunos pares de base-altura son más fáciles de medir y calcular.

Prueba a hacer esto

Calcula el área de este triángulo. Muestra o explica tu razonamiento.



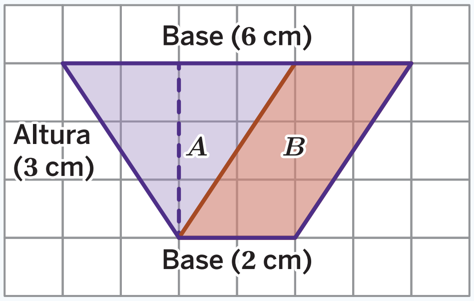
Resumen | Lección 9

Un **polígono** es una figura bidimensional cerrada. En todo polígono:

- El extremo de cada lado se conecta con el extremo de otro lado.
- Todos los lados son rectos, no curvos.
- Los lados no se cruzan.

Puedes usar figuras que tengan áreas que sepas calcular, como triángulos y paralelogramos, para ayudarte a determinar el área de los polígonos.

Estas son dos formas en que se puede cortar un polígono en triángulos y paralelogramos para determinar su área.



Área del triángulo A

$A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3$

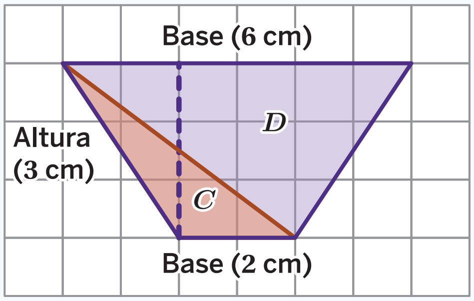
$A=6$

Área del paralelogramo B

$A=2\cdot 3$

$A=6$

Área $=6+6$
Área $=12$ centímetros cuadrados



Área del triángulo C

$A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3$

$A=3$

Área del triángulo D

$A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3$

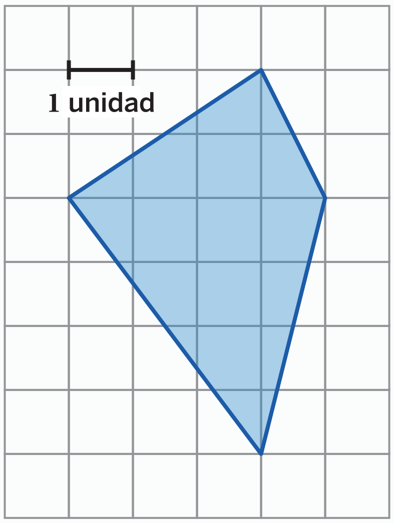
$A=9$

Área $=3+9$
Área $=12$ centímetros cuadrados

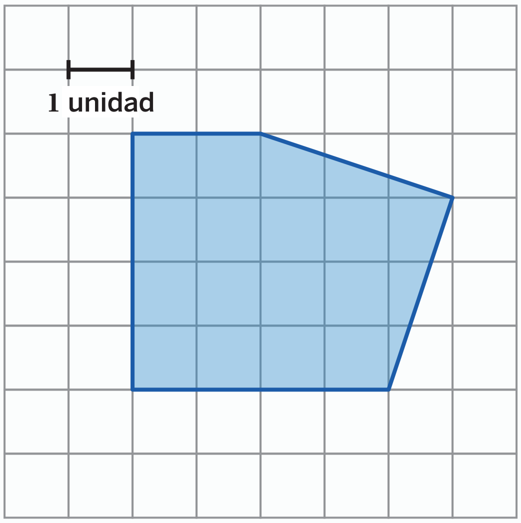
Prueba a hacer esto

Calcula el área de cada polígono.

a



b



Resumen | Lección 10

El **área de superficie** de un prisma rectangular es la suma de las áreas de sus superficies. El **volumen** de un prisma rectangular mide el número de cubos unitarios que se pueden introducir en su interior sin espacios ni superposiciones. Dado que el volumen es una medida tridimensional, se mide en unidades cúbicas.

A continuación se muestra un prisma rectangular con un área de superficie de 52 unidades cuadradas y un volumen de 24 unidades cúbicas.

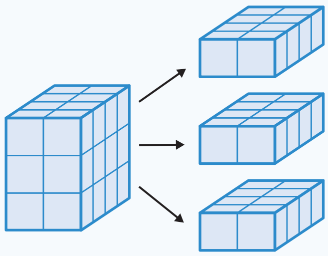
Área de superficie

$(2 \cdot 3) \cdot 2 = 12$

$(4 \cdot 3) \cdot 2 = 24$

$(2 \cdot 4) \cdot 2 = 16$

$12 + 24 + 16 = 52$
unidades cuadradas



Volumen

$8 + 8 + 8 = 24$

24 cubos $= 24$
unidades cúbicas

Prueba a hacer esto

a Cada una de las figuras A y B tiene un volumen de 4 unidades cúbicas. ¿Cuál tiene la mayor área de superficie?

A. La figura A

B. La figura B

C. Son iguales.

Figura A

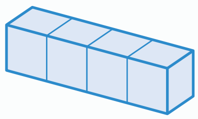
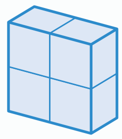
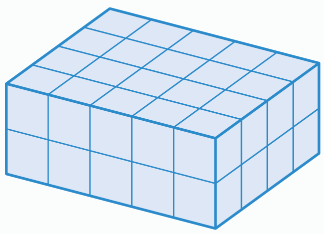


Figura B



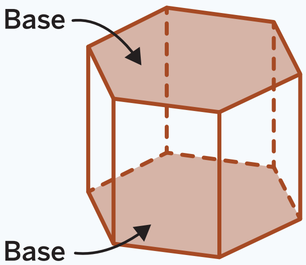
b Determina el área de superficie de esta figura.



Un **poliedro** es una figura tridimensional cerrada con lados planos. Cada lado plano de un poliedro se denomina **cara** y la cara que le da nombre al poliedro se llama **base**.

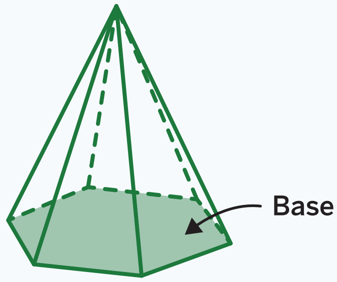
Los prismas y las pirámides son tipos de poliedros.

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos bases que son copias idénticas. Las bases están conectadas por rectángulos o paralelogramos.



Prisma

Una **pirámide** es un poliedro en el que la base es un polígono. Todas las demás caras son triángulos que se unen en un único punto.



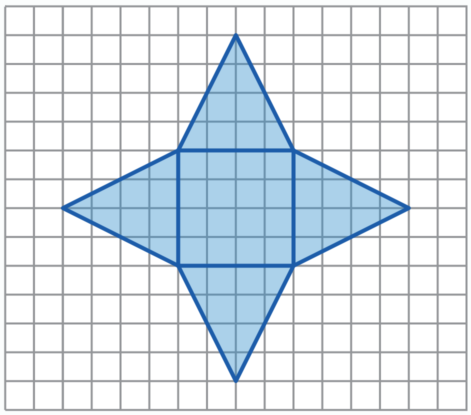
Pirámide

Una **red** es una figura bidimensional que se puede plegar para formar un poliedro. Las redes nos muestran cómo sería un poliedro si estuviera “desplegado” y nos permiten ver todas las caras al mismo tiempo.

Prueba a hacer esto

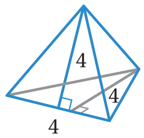
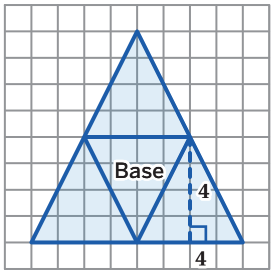
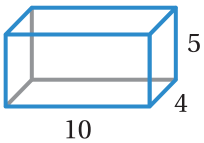
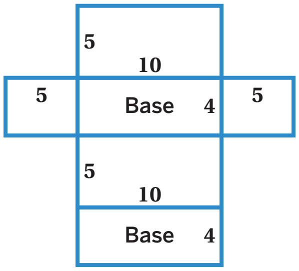
Si se plegara esta red, ¿formaría una pirámide, un prisma o ninguna de las dos cosas?

Explica tu razonamiento.



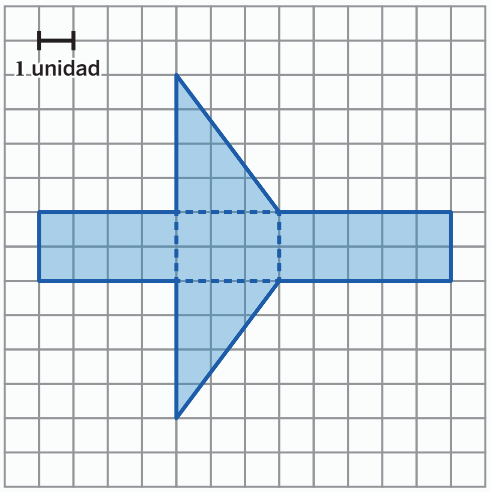
Podemos dibujar una red para crear una representación bidimensional de una figura tridimensional. Una red puede ayudarnos a determinar el área de superficie de un poliedro porque muestra todas las caras a la vez.

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo usar una red para determinar el área de superficie de una pirámide o un prisma.

Poliedro	Red	Área de superficie
Pirámide triangular 		$4\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) = 32$ unidades cuadradas
Prisma rectangular 		$2(4 \cdot 10) + 2(4 \cdot 5) +$ $2(5 \cdot 10) = 220$ unidades cuadradas

Prueba a hacer esto

Aquí tienes una red.



a ¿Qué poliedro creará esta red al plegarla?

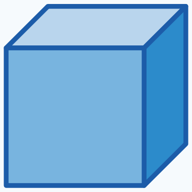
b ¿Cuál es su área de superficie?

Resumen | Lección 13

El área de superficie de cualquier poliedro es el área total de todas las caras. Dibujar una red o dibujar caras individuales puede ayudarnos a entender y llevar la cuenta de los cálculos.

Podemos agrupar caras idénticas para reducir el número de pasos en nuestros cálculos. Por ejemplo, un cubo está formado por 6 caras idénticas, por lo que podemos determinar el área de una cara y multiplicarla por 6 para determinar el área de superficie total.

Este es un ejemplo.



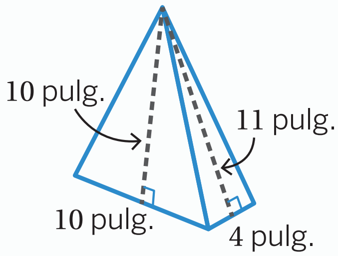
Una cara
$3 \cdot 3 = 9$

Todas las caras
$9 \cdot 6 = 54$

Área de superficie total
54 centímetros cuadrados

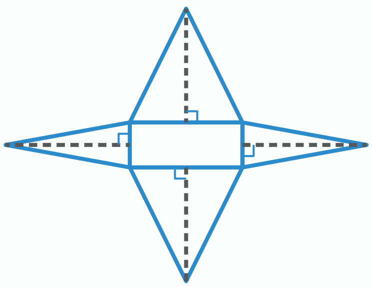
Prueba a hacer esto

Aquí se muestra una pirámide rectangular y su red.



a Rotula la red con las medidas de cada cara.

b Calcula el área de superficie.



Resumen | Lección 14

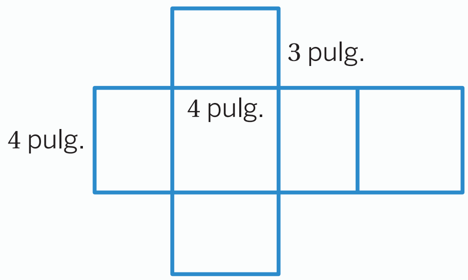
Los recipientes de comida para llevar y los recipientes de plástico reutilizables para alimentos son ejemplos de poliedros que vemos en la vida diaria.

Los modelos matemáticos pueden ayudarnos a diseñar objetos de uso diario, como recipientes de comida para llevar. Para hacer esto, necesitamos:

- Conocer el tamaño y la forma del alimento que se colocará en el recipiente.
- Decidir la forma que tendrá el recipiente.
- Asegurarnos de que el recipiente será lo suficientemente grande como para que quepa el alimento, sin ser demasiado grande.
- Saber cuánto material necesitamos para fabricar el recipiente. ¡Es aquí es donde el área de superficie resulta útil!

Prueba a hacer esto

Aquí tienes el diseño de un posible recipiente de comida para llevar.



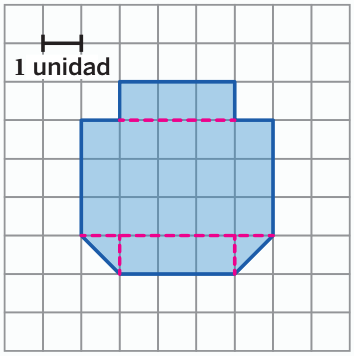
a Describe un comida que podría caber en este recipiente.

b Calcula cuánto material necesitas para fabricar el recipiente.

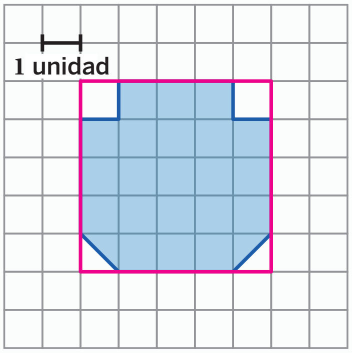
Lección 1

22 unidades cuadradas.

Nota para familias y cuidadores: Estas son dos estrategias para determinar el área:



$3 + 3 + 0.5 + 0.5 + 15 = 22$ *unidades cuadradas*

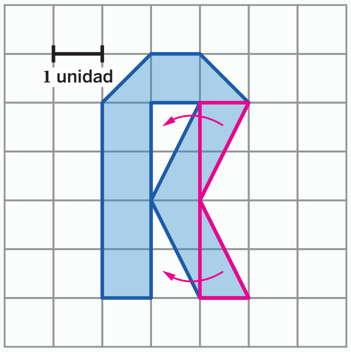


$5 \cdot 5 - (2 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5) = 22$ *unidades cuadradas*

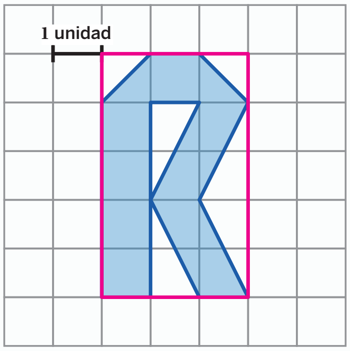
Lección 2

10 unidades cuadradas.

Nota para familias y cuidadores: Estas son dos estrategias para determinar el área:



Cuenta todos los cuadrados enteros (5) *y los medios* $(0.5 + 0.5)$. *Luego, mueve los dos triángulos de la derecha para crear dos rectángulos que tengan un área de 2 unidades cuadradas cada uno. Cuando se suman estos, el área es* $5 + 0.5 + 0.5 + 2 + 2 = 10$ *unidades cuadradas.*

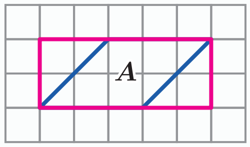


Dibuja un recuadro alrededor de la figura y calcula el área, que es $5 \cdot 3 = 15$ *unidades cuadradas. Luego resta el área de las partes no sombreadas de esta área:* $15 - 5 = 10$ *unidades cuadradas.*

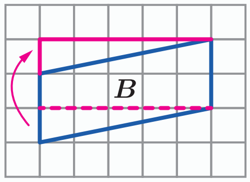
Prueba a hacer esto | Clave de respuestas

Lección 3

a 6 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Una estrategia consiste en dibujar un rectángulo alrededor del paralelogramo y hallar su área, que es de 10 unidades cuadradas. Luego se restan las áreas de las piezas del interior del rectángulo que no forman parte del paralelogramo para obtener $10 - 4 = 6$ unidades cuadradas.



b 10 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Una estrategia consiste en mover el triángulo de la parte inferior hacia arriba para crear un rectángulo y luego calcular el área del rectángulo. El área del rectángulo es $2 \cdot 5 = 10$ unidades cuadradas.



Lección 4

Paralelogramo	Base (unidades)	Altura (unidades)	Área (unidades cuadradas)
R	5	4	20
S	4	2	8

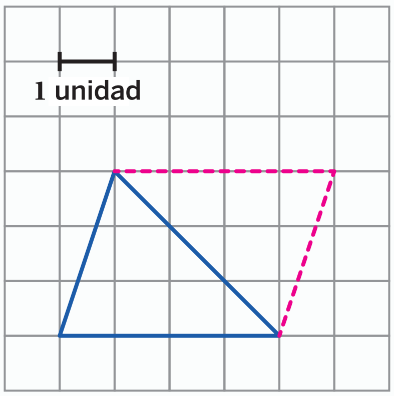
Lección 5

a *Las respuestas pueden variar.* Andrea y Elena tienen razón. Eligieron lados diferentes como base del paralelogramo, pero cada uno seleccionó una altura que es perpendicular a la base que eligieron.

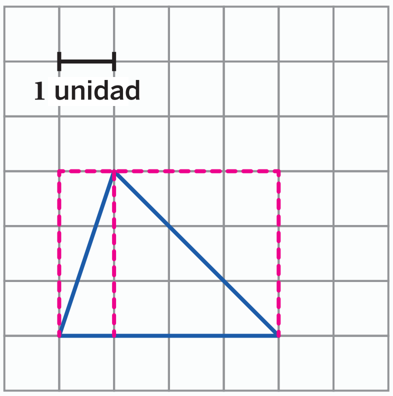
b 54 pulgadas cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Con la base y la altura de Andrea, tenemos $9 \cdot 6 = 54$. Con la base y la altura de Andrea, tenemos $7.5 \cdot 7.2 = 54$.

Lección 6

6 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Estas son dos estrategias para determinar el área:



Se crea un paralelogramo con la misma base y altura que el triángulo. El área de este paralelogramo es de $3 \cdot 4 = 12$ unidades cuadradas. El área del triángulo es la mitad, 6 unidades cuadradas.



Se divide el triángulo en dos triángulos de forma que cada uno sea la mitad de un rectángulo. El área del triángulo original es de $\frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2}$, o $1.5 + 4.5 = 6$ unidades cuadradas.

Lección 7

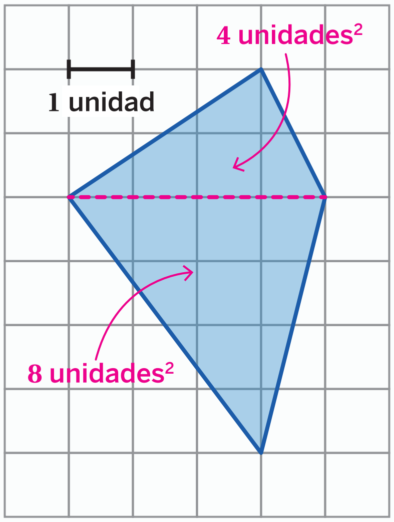
Figura	Base (unidades)	Altura (unidades)	Área (unidades cuadradas)
A	6	3	9
B	6	3	18
C	6	3	9

Lección 8

36 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Primero, se multiplica $9 \cdot 8 = 72$. Después, $\frac{72}{2} = 36$.

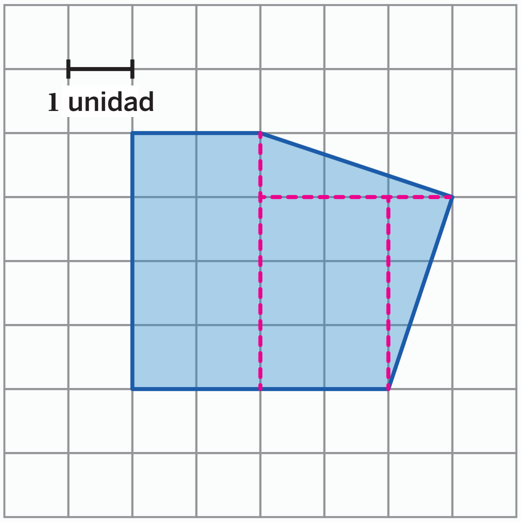
Lección 9

a 12 unidades cuadradas



Nota para familias y cuidadores: Una estrategia consiste en dividir la figura en dos triángulos y hallar el área de cada uno. Luego sumamos estas áreas, así que $4 + 8 = 12$ unidades cuadradas.

b 17 unidades cuadradas



Nota para familias y cuidadores: Podemos dividir la figura en dos rectángulos y dos triángulos y hallar el área de cada figura. Luego sumamos todas las áreas, así que $8 + 6 + 1.5 + 1.5 = 17$ unidades cuadradas.

Lección 10

a La figura A.
Nota para familias y cuidadores: El área de superficie de la figura A es de 18 unidades cuadradas. El área de superficie de la figura B es de 16 unidades cuadradas.

b 76 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: La figura tiene 6 caras. Dos caras tienen un área de $2 \cdot 5 = 10$ unidades cuadradas. Dos caras tienen un área de $4 \cdot 5 = 20$ unidades cuadradas. Dos caras tienen un área de $4 \cdot 2 = 8$ unidades cuadradas. En total, el área de todas las caras es $2 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 8 = 76$ unidades cuadradas.

Lección 11

Una pirámide.
Nota para familias y cuidadores: La red tiene una base. Todas las demás caras son triángulos que se encontrarían en un vértice si se plegara.

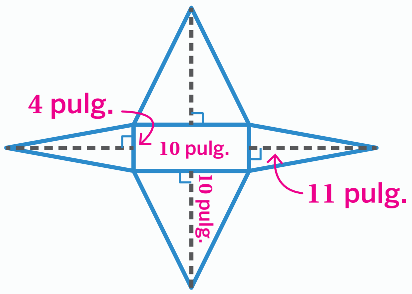
Lección 12

a Un prisma triangular.
Nota para familias y cuidadores: La red muestra dos caras triangulares que son copias idénticas. Esas son las dos bases del prisma y todas las demás caras son rectángulos.

b 36 unidades cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Una estrategia consiste en sumar las áreas de cada cara. Los tres rectángulos tienen áreas de 8, 6, and 10 unidades cuadradas. Cada triángulo tienen un área de 6 unidades cuadradas. En total, la suma de las áreas es $8 + 6 + 10 + 6 + 6 = 36$ unidades cuadradas.

Lección 13

a



b 184 pulgadas cuadradas.
Nota para familias y cuidadores: Una estrategia consiste en sumar las áreas de cada cara. La base tiene un área de $10 \cdot 4 = 40$ pulgadas cuadradas. Hay dos caras triangulares con un área de $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ pulgadas cuadradas y dos caras triangulares con un área de $\frac{11 \cdot 4}{2} = 22$ pulgadas cuadradas. En total, $40 + 2 \cdot 50 + 2 \cdot 22 = 184$ pulgadas cuadradas.

Lección 14

a *Las respuestas pueden variar.* En esta caja podría caber una hamburguesa.

b 80 pulgadas cuadradas de material.
Nota para familias y cuidadores: Esto es lo mismo que calcular el área de superficie. Hay dos caras que miden $4 \cdot 4 = 16$ pulgadas cuadradas y cuatro caras que miden $3 \cdot 4 = 12$ pulgadas cuadradas y $2 \cdot 16 + 4 \cdot 12 = 80$ pulgadas cuadradas.