

Unidad **3**

# Relaciones proporcionales y lineales

La pendiente de una línea nos indica su inclinación, pero ¿sabías que puede revelar aún más? Una simple línea en una gráfica contiene *infinita* información. Una línea puede decirnos qué es más rápido: una tortuga o una liebre. Puede ayudarnos a clasificar monedas en una alcancía. Incluso puede ayudarnos a determinar cuántas tazas puede llenar un dispensador de agua. ¡Exploremos las relaciones proporcionales y lineales y aprendamos todo sobre lo que puede representar una línea!

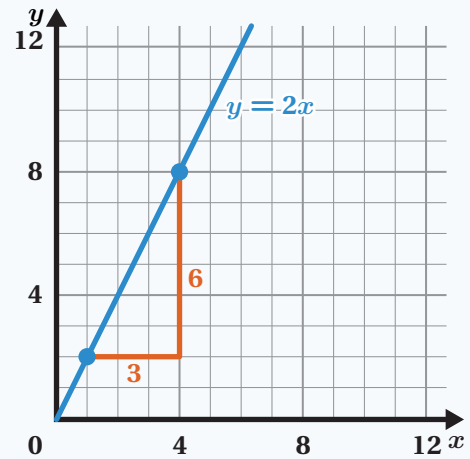
## Preguntas esenciales

- ¿Qué pueden enseñarte las relaciones proporcionales y la pendiente sobre las relaciones lineales?
- ¿Cómo se conectan entre sí las ecuaciones, tablas y gráficas de relaciones lineales?
- ¿Qué significa que un par ordenado sea una solución de una ecuación lineal?



Una recta que pasa por el origen,  $(0, 0)$ , representa una *relación proporcional*. La *pendiente* de la recta representa una *tasa unitaria* para esta relación.

Aquí se muestra una gráfica de la ecuación  $y = 2x$ . La pendiente de la recta es  $\frac{6}{3}$ , o 2.

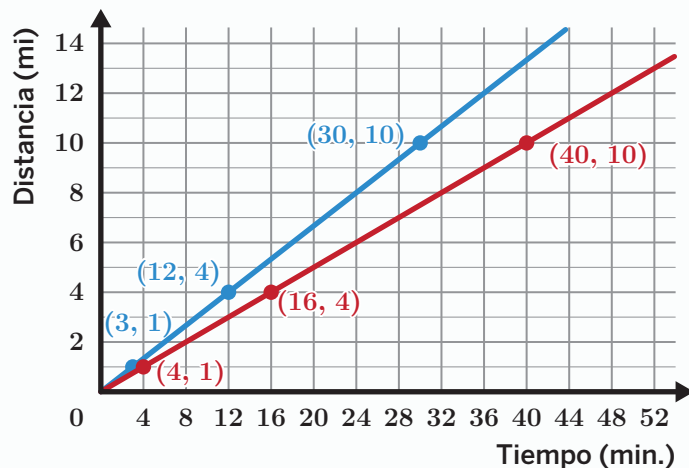


## Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la distancia que recorren Jasmine y Sothy en un largo paseo en bicicleta.

Jasmine recorre 4 millas cada 16 minutos y Sothy recorre 4 millas cada 12 minutos.

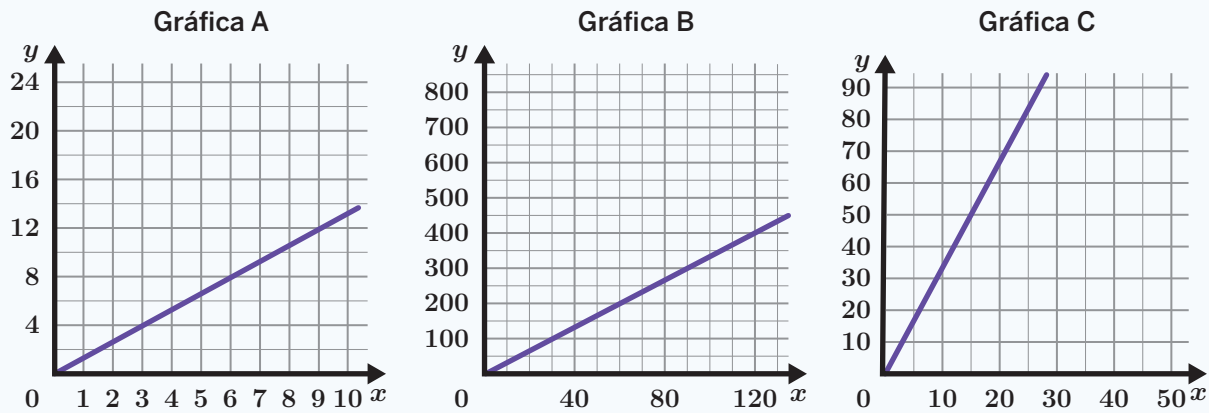
- a** ¿Estas rectas representan relaciones proporcionales? Explica tu razonamiento.



- b** ¿Cuál es la velocidad de cada ciclista expresada como una tasa unitaria?

Podemos representar una relación proporcional usando la ecuación  $y = mx$ , donde  $m$  representa tanto una tasa unitaria como la pendiente de la recta.

Cuando representamos estas relaciones en ejes con diferentes escalas, podemos usar el valor de la pendiente para comparar estas gráficas. Por ejemplo, se pueden comparar las gráficas A, B, y C usando el valor de sus pendientes.



- Pendiente de la gráfica A:  $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
- Pendiente de la gráfica B:  $\frac{100}{30} = \frac{10}{3}$
- Pendiente de la gráfica C:  $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$

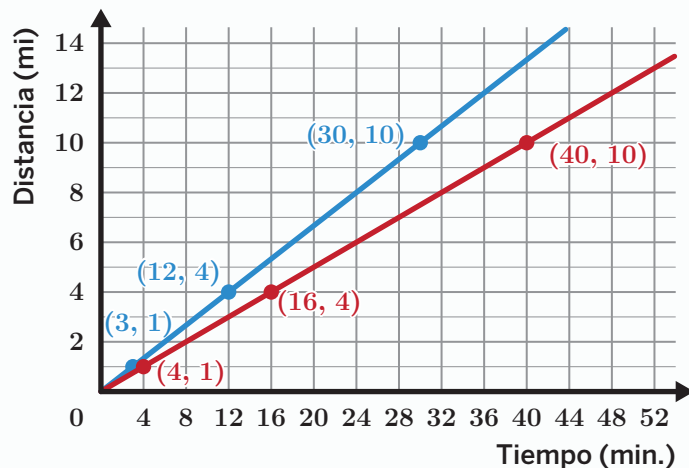
Se puede ver que las pendientes de la gráfica B y la gráfica C son equivalentes. Esto significa que tienen la misma relación proporcional, aunque parezca que las rectas no tienen la misma inclinación.

## Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la distancia que recorren Jasmine y Sothy en un largo paseo en bicicleta.

Jasmine recorre 4 millas cada 16 minutos y Sothy recorre 4 millas cada 12 minutos.

- a** Determina la pendiente de cada recta.



- b** Escribe una ecuación que represente cada recta.

Cuando se comparan relaciones proporcionales, es útil usar diferentes representaciones, tales como ecuaciones, tablas y gráficas.

Puedes representar relaciones proporcionales con la ecuación  $y = mx$ , donde  $m$  es la pendiente de una recta y también representa una tasa unitaria para la situación. Puedes identificar la pendiente o la tasa unitaria utilizando todas las diferentes representaciones o utilizando triángulos de pendiente dentro de una gráfica.

## Prueba a hacer esto

En el 2024, el salario mínimo federal es de \$7.25 por hora.

Plantea una ecuación, una tabla y una gráfica que representen la relación entre las horas que trabaja y el dinero que recibe una persona que gana el salario mínimo.

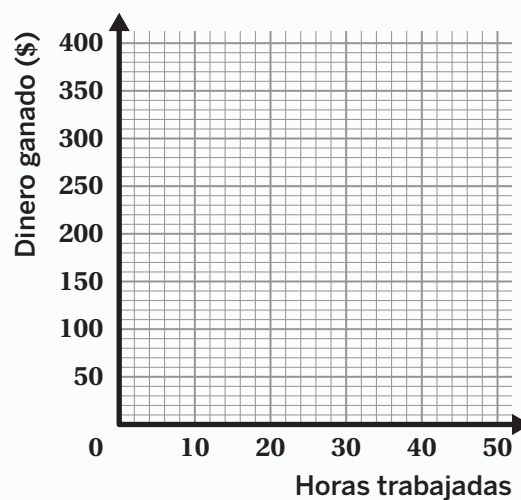
Tabla

Horas trabajadas	Dinero ganado (\$)

Ecuación

\_\_\_\_\_

Gráfica

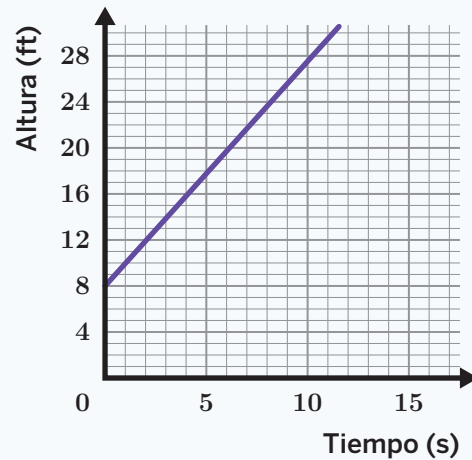


Las **relaciones lineales** son gráficas que son rectas. Algunas relaciones lineales son relaciones proporcionales y otras no.

Por ejemplo, esta gráfica representa la altura de una bandera, en pies, a lo largo del tiempo.

- La recta comienza en  $(0, 8)$ , lo que significa que la bandera comienza a una altura de 8 pies desde el suelo.
- La pendiente es 2, lo que representa la cantidad de pies que la bandera sube cada segundo.
- La ecuación  $y = 8 + 2x$  representa la altura de la bandera,  $y$ , después de  $x$  segundos.

Esta relación es lineal, pero no es proporcional porque la recta no pasa por el origen.

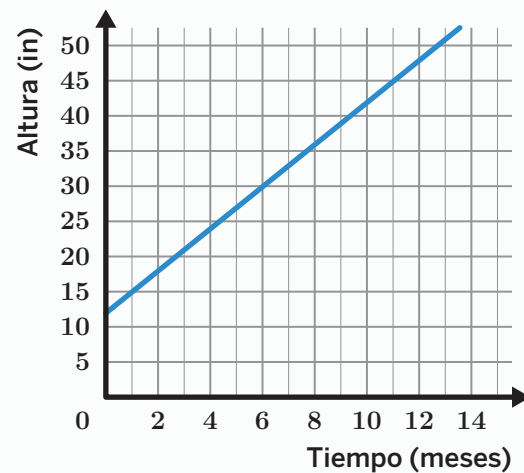


## Prueba a hacer esto

La gráfica muestra la altura, en pulgadas, de una planta de bambú cada mes a partir de que la plantaron.

La ecuación de esta recta es  $y = 3x + 12$ .

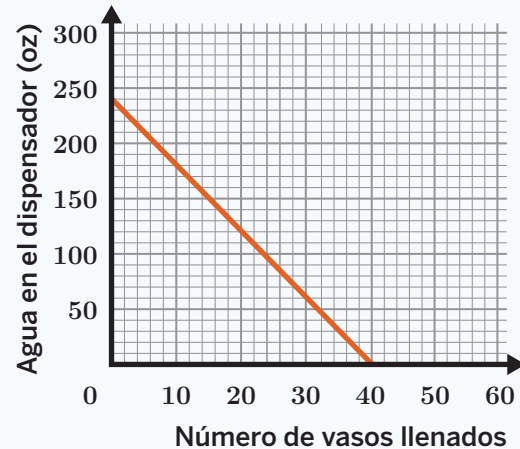
- ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué significa este valor en el contexto?
- ¿Qué altura tenía la planta de bambú cuando la plantaron?
- ¿Es una relación lineal? Explica tu razonamiento.



Cuando una *relación lineal* tiene una pendiente negativa, significa que a medida que los valores de  $x$  aumentan, los valores de  $y$  disminuyen a una tasa constante.

Digamos que la ecuación  $y = 240 - 6x$  representa la cantidad de agua en un dispensador,  $y$ , después de haber llenado  $x$  vasos.

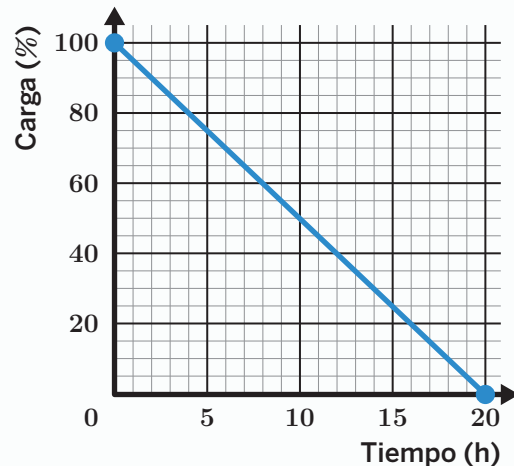
- La **intersección vertical**, también llamada *intersección con el eje  $y$* , es  $(0, 240)$ . En esta situación, la intersección vertical representa la cantidad inicial de agua en el dispensador.
- La pendiente es  $-6$ . Esto significa que la cantidad de agua disminuye en 6 onzas por cada vaso llenado. Como la cantidad de agua disminuye cada vez, la pendiente es negativa.
- La **intersección horizontal**, también llamada *intersección con el eje  $x$* , es  $(40, 0)$ . En esta situación, la intersección horizontal representa cuántos vasos se pueden llenar antes de que el dispensador se quede sin agua.



## Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la carga de un teléfono con respecto al tiempo.

- ¿Cuál es la intersección vertical de la recta y qué representa?
- ¿Cuál es la intersección horizontal de la recta y qué representa?



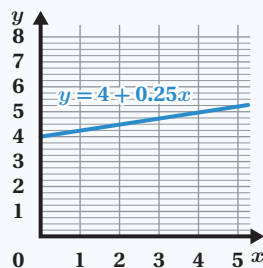
Las ecuaciones de relaciones lineales, o ecuaciones lineales, se pueden escribir en la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  representa la pendiente y  $b$  representa la intersección vertical.

Para relaciones lineales con pendiente *positiva*, los valores de  $y$  aumentan a una tasa constante a medida que aumentan los valores de  $x$ . Para relaciones lineales con pendiente *negativa*, los valores de  $y$  disminuyen a una tasa constante a medida que aumentan los valores de  $x$ .

Aquí se muestran dos ejemplos.

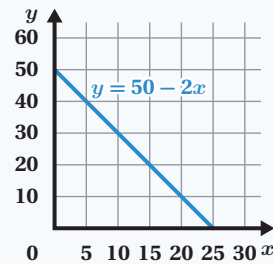
**Pendiente positiva:** Un yogur helado de tamaño mediano cuesta \$4, más \$0.25 por ingrediente adicional.

Haz que  $y$  sea el costo total del yogur helado después de agregar  $x$  ingredientes adicionales.



**Pendiente negativa:** Una estudiante carga una tarjeta de una sala de juegos con \$50. Cada vez que juega un juego, se restan \$2 de la cantidad disponible en la tarjeta de juego.

Haz que  $y$  represente la cantidad en dólares que queda en la tarjeta después de que la estudiante juegue  $x$  partidas.

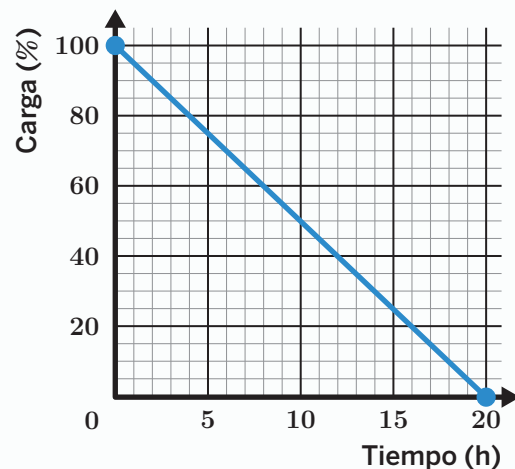


## Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la carga de un teléfono con respecto al tiempo.

Sea  $y$  el porcentaje de carga después de  $x$  horas.

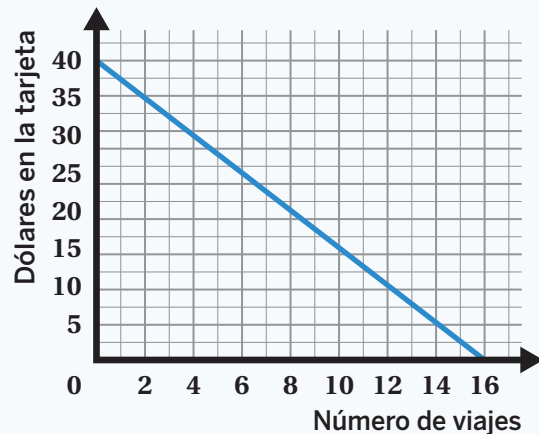
- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- ¿Cuál es la intersección vertical?
- Escribe una ecuación que represente esta situación.



Las relaciones lineales pueden ayudarnos a hacer predicciones. Podemos usar la gráfica o la ecuación de una relación lineal para determinar el valor de una variable cuando se nos da el valor de la otra variable.

Digamos que queremos saber cuánto dinero quedará en una tarjeta de transporte después de 10 viajes. Podemos observar una gráfica como esta y determinar la cantidad de dinero que hay en la tarjeta,  $y$ , que se corresponde con  $x = 10$ . En esta situación, la pendiente de la recta nos dice cuánto cuesta cada viaje.

La intersección con el eje  $y$  nos dice cuánto dinero hay en la tarjeta antes de hacer el primer viaje. A diferencia de una relación proporcional, la gráfica de esta relación lineal no pasa por el origen.

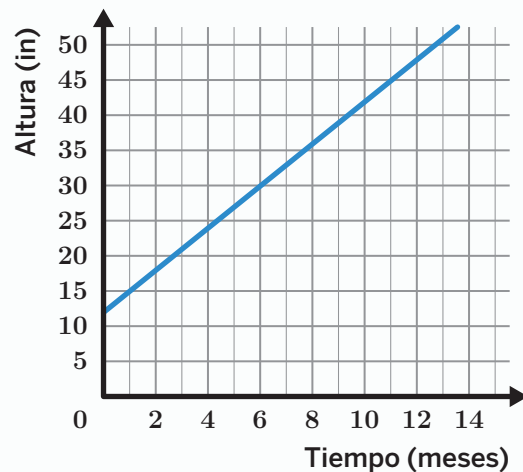


## Prueba a hacer esto

La gráfica muestra la altura, en pulgadas, de una planta de bambú cada mes a partir de que la plantaron.

La ecuación de esta recta es  $y = 3x + 12$ .

¿Cuánto medirá la planta de bambú después de 12 meses?



Una *traslación* de una recta que representa una relación proporcional crea una recta que es paralela a la preimagen, pero cambia la ubicación de la intersección vertical, también conocida como intersección con el eje  $y$ .

La ecuación  $y = mx$  representa una recta que pasa por el origen. La ecuación  $y = mx + b$  representa una traslación vertical de la recta  $y = mx$  de  $b$  unidades.

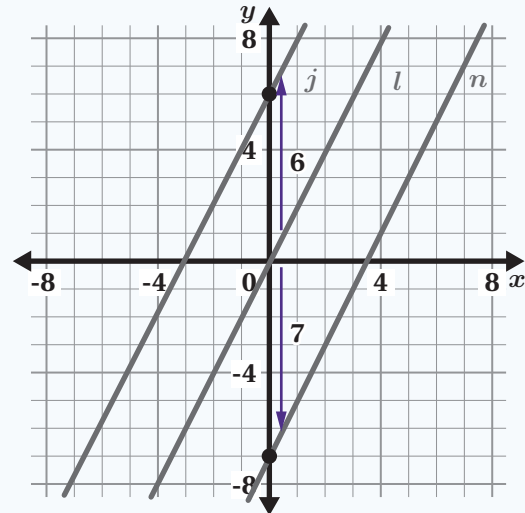
Si  $b > 0$ , la recta se traslada hacia arriba.

Si  $b < 0$ , la recta se traslada hacia abajo.

Por ejemplo, la ecuación de la recta  $l$  es  $y = 2x$ .

Si la recta  $l$  se traslada 6 unidades hacia arriba para producir la recta  $j$ , la ecuación de la recta  $j$  es  $y = 2x + 6$ .

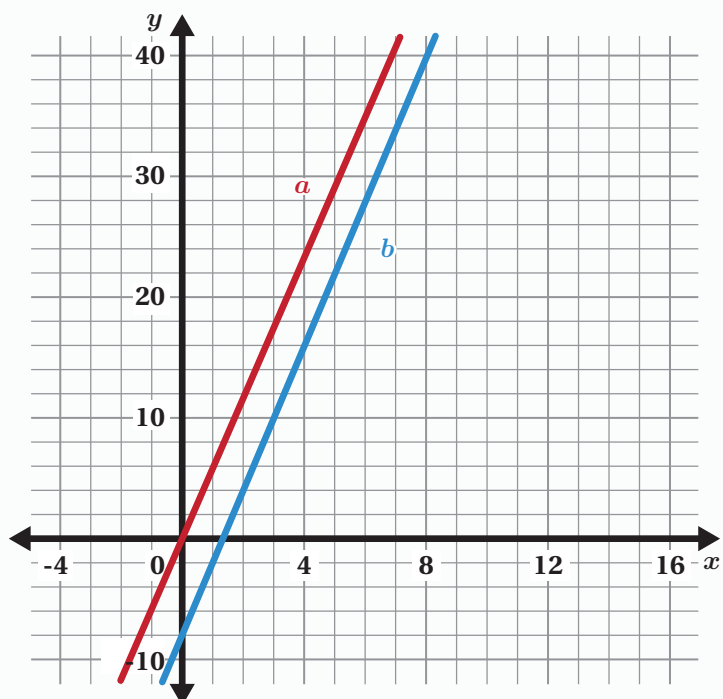
Si la recta  $l$  se traslada 7 unidades hacia abajo para producir la recta  $n$ , la ecuación de la recta  $n$  es  $y = 2x - 7$ .



## Prueba a hacer esto

Estas son las gráficas de la recta  $a$  y la recta  $b$ . La ecuación de la recta  $a$  es  $y = 6x$ .

Escribe la ecuación de la recta  $b$ .

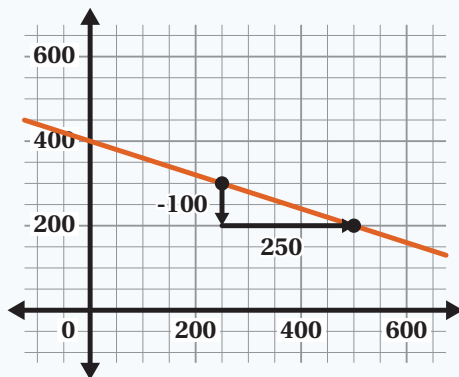


Puedes determinar la pendiente de una recta usando dos puntos en esa recta. Las rectas con pendientes positivas aumentan en altura de izquierda a derecha, mientras que las rectas con pendientes negativas disminuyen en altura de izquierda a derecha.

Puedes utilizar triángulos de pendiente para calcular el cambio vertical y el cambio horizontal entre dos puntos en un plano de coordenadas. También puedes calcular la pendiente enumerando las coordenadas en una tabla y luego determinando la diferencia entre las coordenadas  $y$  (el cambio vertical) y la diferencia entre las coordenadas  $x$  (el cambio horizontal).

La pendiente es la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal.

Usando triángulos de pendiente



Usando coordenadas en una tabla

$x$	$y$
250	300
500	200

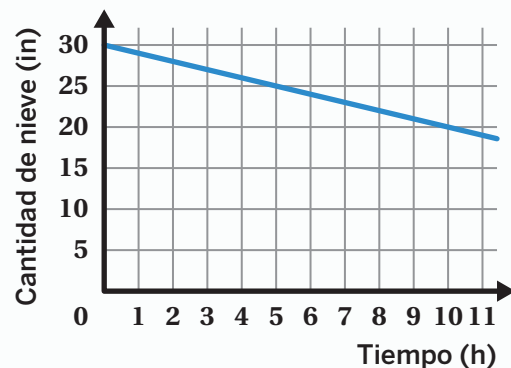
Se muestran flechas azules que indican el cambio de  $x$  de 250 a 500 (+250) y el cambio de  $y$  de 300 a 200 (-100).

$$\frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{-100}{250} = -\frac{2}{5}$$

## Prueba a hacer esto

Esta gráfica representa la cantidad de nieve en el suelo después de que comienza a derretirse bajo el sol.

¿Cuál es la pendiente de la recta?

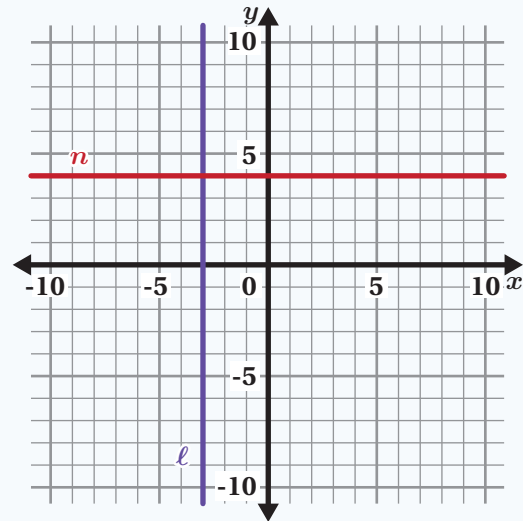


En el plano de coordenadas:

- Las rectas horizontales representan situaciones en las que el valor de  $y$  es constante y los valores de  $x$  cambian. Las rectas horizontales tienen una pendiente de 0.
- Las rectas verticales representan situaciones en las que el valor de  $x$  es constante y los valores de  $y$  cambian. Las rectas verticales tienen una pendiente *indefinida*.

Por ejemplo, la ecuación  $y = 4$  representa la recta horizontal  $n$  porque cada punto de la recta tiene la misma coordenada  $y$ , 4.

La ecuación  $x = -3$  representa la recta vertical  $\ell$  porque cada punto de la recta tiene la misma coordenada  $x$ , -3.

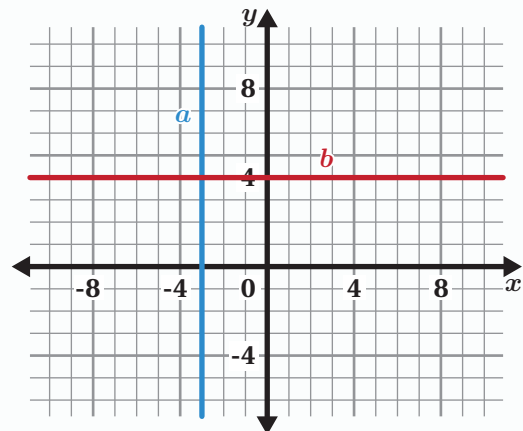


## Prueba a hacer esto

Escribe una ecuación para cada recta:

**a** Recta  $a$ : \_\_\_\_\_

**b** Recta  $b$ : \_\_\_\_\_



Aquí se muestran dos estrategias diferentes para escribir la ecuación de una recta usando dos puntos dados.

### Estrategia que usa una tabla

Primero, calcula la pendiente usando una tabla. Luego, introduce las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación  $y = mx + b$  para determinar la intersección con el eje  $y$ . Para finalizar, escribe la ecuación en la forma  $y = mx + b$ .

x	y
1	8
3	2

+2 (Δx)      -6 (Δy)      pendiente:  $\frac{-6}{2} = -3$

$$y = -3x + b$$

Sustituir la  $x$  y la  $y$  con (1, 8).

$$8 = -3(1) + b$$

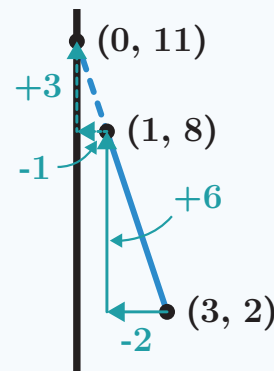
$$8 = -3 + b$$

$$11 = b$$

$$y = -3x + 11$$

### Estrategia que usa triángulos de pendiente

Dibuja una recta y usa triángulos semejantes para determinar la pendiente y la intersección con el eje  $y$  de la recta. Luego, escribe la ecuación en la forma  $y = mx + b$ .



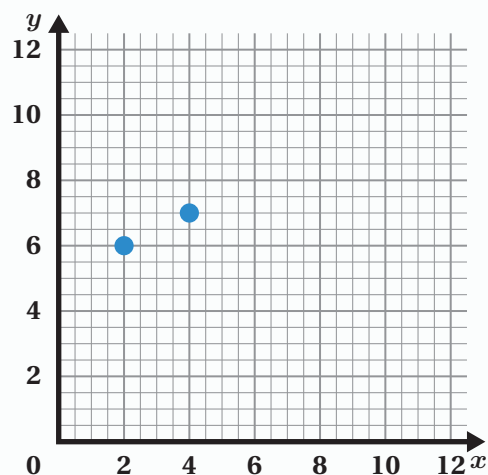
$8 + 3 = 11$   
intersección con el eje  $y$ : (0, 11)

Pendiente: -3

$$y = -3x + 11$$

## Prueba a hacer esto

Escribe una ecuación de una recta que pase por los puntos (2, 6) y (4, 7).

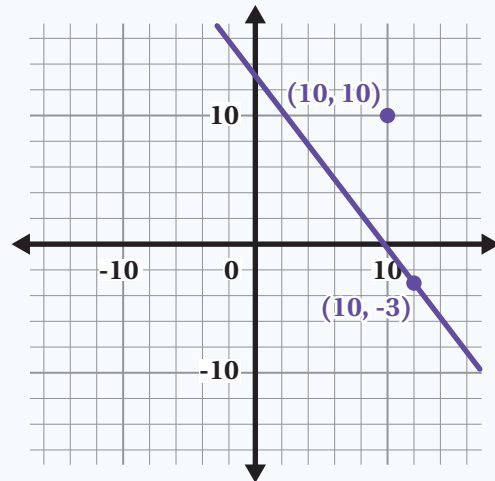


Una **solución** de una ecuación con dos variables es un conjunto de valores que hacen que la ecuación sea verdadera. Las soluciones suelen escribirse como un par ordenado,  $(x, y)$ .

Cada punto que se encuentra sobre una recta es una solución de esa ecuación. Los puntos que no se encuentran sobre la recta *no* son soluciones de la ecuación.

Aquí se muestra una gráfica de la ecuación lineal  $3x + 2y = 24$ .

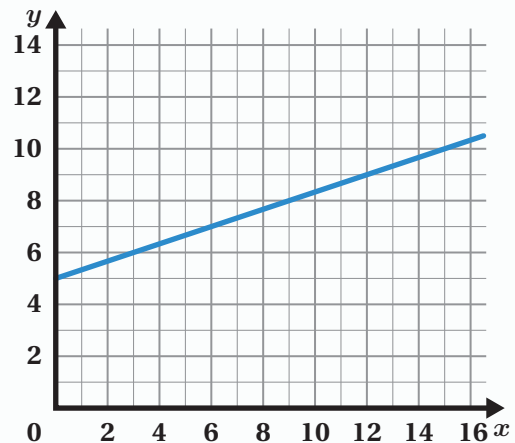
- $(10, -3)$  es una solución de la ecuación  $3x + 2y = 24$  porque el punto está en la gráfica de la recta y porque  $3(10) + 2(-3) = 24$ .
- $(10, 10)$  *no* es una solución porque el punto no está en la recta y porque  $3(10) + 2(10) = 50$ , no 24.
- Aunque no podemos verlo en la gráfica,  $(-10, 27)$  también es una solución porque  $3(-10) + 2(27) = 24$ .



## Prueba a hacer esto

Esta gráfica muestra la recta  $y = \frac{1}{3}x + 5$ .

- ¿Es  $(10, 8)$  una solución de esta ecuación? Explica tu razonamiento.
- ¿Es  $(6, 7)$  una solución de esta ecuación? Explica tu razonamiento.



Las cuatro representaciones de una relación lineal —tabla, gráfica, ecuación y descripción verbal— son útiles para resolver problemas del mundo real.

Digamos que un entrenador tiene un presupuesto de \$120 para comprar la cena de su equipo. Las pizzas cuestan \$20 y los sándwiches cuestan \$8.  $x$  representa la cantidad de pizzas compradas y  $y$  representa la cantidad de sándwiches comprados.

Esta situación se puede modelar mediante la relación lineal  $20x + 8y = 120$ .

Aquí hay dos formas de demostrar que 4 pizzas y 5 sándwiches son una solución a la ecuación:

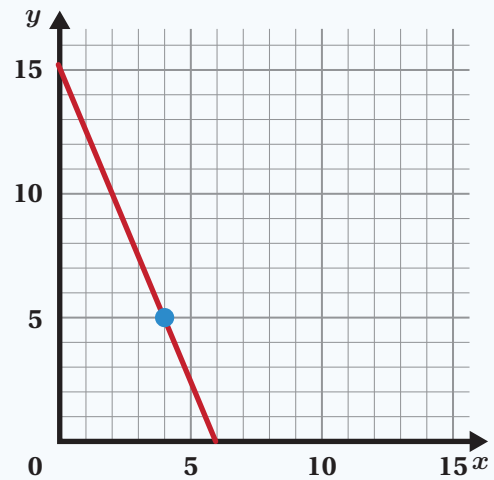
- Los valores  $x = 4$  y  $y = 5$  hacen que la ecuación sea verdadera.

$$20(4) + 8(5) = 120$$

$$80 + 40 = 120$$

$$120 = 120$$

- El punto  $(4, 5)$  está en la gráfica de la relación lineal.

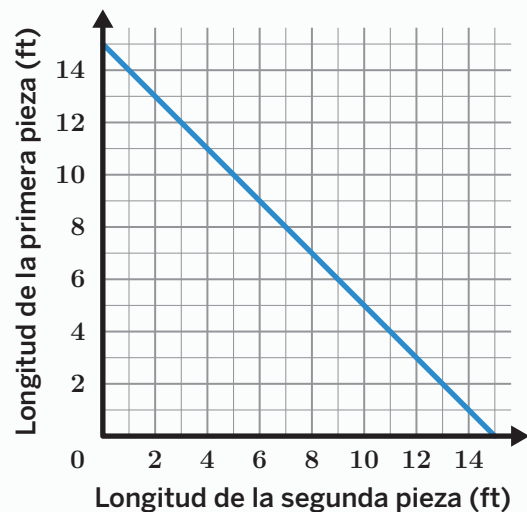


## Prueba a hacer esto

Un trozo de cinta de 15 pies se corta en dos secciones.

Esta gráfica muestra las posibles longitudes de cada sección. La ecuación de la recta es  $y = -x + 15$ .

- ¿Es  $(6, 9)$  una solución de esta ecuación? Explica tu razonamiento.
- Elige *una* solución de la ecuación e interpreta lo que significa en esta situación.



### Lección 1

- a *Sí. Las explicaciones pueden variar. Ambas rectas pasan por el origen, (0, 0), por lo que ambas representan relaciones proporcionales.*
- b Jasmine:  $\frac{1}{4}$  o 0.25 millas por minuto. Sothy:  $\frac{1}{3}$  o aproximadamente 0.33 millas por minuto. *Nota para cuidadores:* Para hallar la velocidad de Jasmine, divide 4 millas por 16 minutos, o  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ . Para hallar la velocidad de Sothy, divide 4 millas por 12 minutos, o  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

### Lección 2

- a Jasmine:  $\frac{1}{4}$  o 0.25. Sothy:  $\frac{1}{3}$  o aproximadamente 0.33.  
*Nota para cuidadores:* Para hallar la pendiente de la recta de Jasmine, divide 4 millas por 16 minutos, o  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ . Para hallar la pendiente de la recta de Sothy, divide 4 millas por 12 minutos, o  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .
- b Jasmine:  $y = \frac{1}{4}x$   
Sothy:  $y = \frac{1}{3}x$

### Lección 3

Tabla

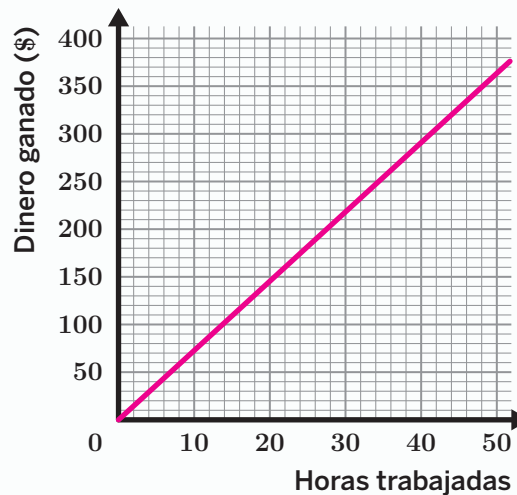
*Las respuestas pueden variar.*

Horas trabajadas	Dinero ganado (\$)
10	72.50
20	145
30	217.50
40	290

Ecuación

$y = 7.25x$

Gráfica



### Lección 4

- a *3. Las respuestas pueden variar. Significa que la planta de bambú crece 3 pulgadas cada mes.*
- b *12 pulgadas.*  
*Nota para cuidadores:* La gráfica comienza en (0, 12), lo que significa que la planta medía 12 pulgadas de alto al plantarla, a los 0 meses.
- c *Sí. Las explicaciones pueden variar. La gráfica forma una línea recta.*

## Lección 5

- a  $(0, 100)$ . Las respuestas pueden variar. La carga del teléfono era de 100% a las 0 horas.
- b  $(20, 0)$ . Las respuestas pueden variar. La carga del teléfono era de 0% después de 20 horas.

## Lección 6

- a -5
- b  $(0, 100)$
- c  $y = -5x + 100$  (o equivalente)

## Lección 7

48 pulgadas.

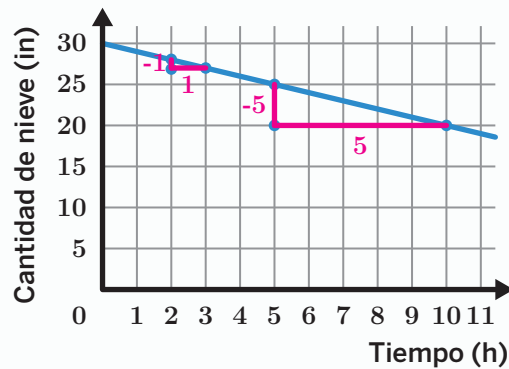
Nota para cuidadores:  $y = 3(12) + 12 = 48$

## Lección 8

$$y = 6x - 8$$

## Lección 9

-1. Nota para cuidadores: Esta es una estrategia para determinar la pendiente usando triángulos de pendiente:



Pendiente:  $\frac{-1}{1} = -1$  o  $\frac{-5}{5} = -1$ .

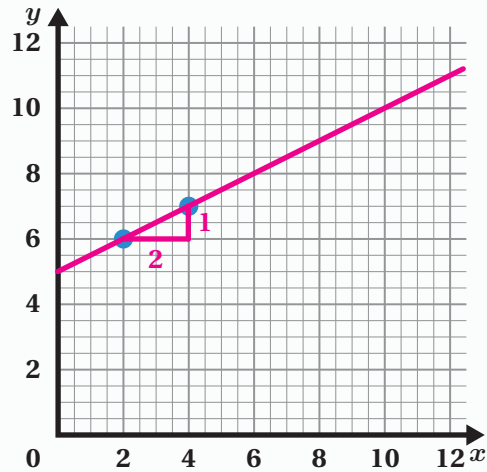
## Lección 10

- a  $x = -3$
- b  $y = 4$

### Lección 11

$$y = \frac{1}{2}x + 5.$$

*Nota para cuidadores: Esta es una estrategia para determinar la ecuación usando un triángulo de pendiente:*



*El triángulo de pendiente muestra que el cambio en los valores de  $y$  es 1 y el cambio en los valores de  $x$  es 2, lo que significa que la pendiente es  $\frac{1}{2}$ . La intersección con el eje  $y$  es  $(0, 5)$ , por lo que la ecuación es  $y = \frac{1}{2}x + 5$ .*

### Lección 12

- a** No. Las explicaciones pueden variar. El punto  $(10, 8)$  no está en la recta y  $8 \neq \frac{1}{3}(10) + 5$ .
- b** Sí. Las explicaciones pueden variar. El punto  $(6, 7)$  está en la recta y  $7 = \frac{1}{3}(6) + 5$ .

### Lección 13

- a** Sí. Las explicaciones pueden variar. El punto  $(6, 9)$  está en la recta y  $9 = -6 + 15$ . Esto tiene sentido porque si se corta una cinta de 15 pies de modo que una sección mida 6 pies, la otra sección mediría 9 pies.
- b** Las respuestas pueden variar. El punto  $(10, 5)$  significa que si la primera sección mide 5 pies de largo, la segunda sección mide 10 pies de largo.