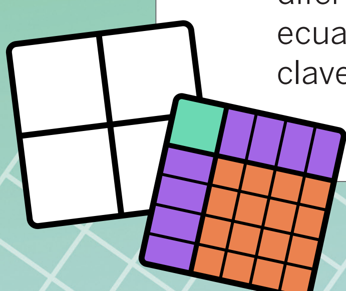
Unidad 8

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas han fascinado a los matemáticos durante miles de años. En esta unidad aprenderás diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas y desarrollarás estrategias para elegir el mejor método de resolución. También conectarás tu proceso de resolución con las gráficas y las características clave de las funciones cuadráticas.

Preguntas esenciales

- ¿Cómo puedes resolver ecuaciones cuadráticas de forma simbólica y de forma gráfica?
- ¿Cómo puedes utilizar la estructura de la ecuación, las herramientas disponibles y tus preferencias matemáticas personales para seleccionar de forma estratégica un método de resolución?
- ¿De qué manera reescribir expresiones de diferentes formas puede ayudar a resolver ecuaciones e identificar las características clave de las funciones?



Resumen | Lección 1

Las expresiones cuadráticas y lineales son tipos de *polinomios*. Al sumar o restar funciones cuadráticas y lineales, puedes predecir qué tipos de funciones se producirán.

La suma o resta de polinomios siempre producirá un polinomio. Por ejemplo, al sumar o restar dos expresiones cuadráticas, el resultado puede ser una expresión cuadrática, lineal o constante. La suma o resta de dos expresiones cuadráticas no puede producir una expresión exponencial.

Muchas veces el objetivo de sumar y restar expresiones cuadráticas y lineales es escribir la expresión usando la menor cantidad posible de términos.

Aquí tienes algunos ejemplos de sumas y restas de expresiones cuadráticas y lineales escritas usando la menor cantidad posible de términos.

Sumas	Restas
$(2x-1)+(x+7)=3x+6$	$(4x^2+3x)-(3x-5)=4x^2+5$
$(-5x^2+9x-4)+(5x^2-9x+2)=-2$	$(x^2+4x+1)-(x^2+2x-5)=2x+6$

Prueba a hacer esto

a Selecciona *todos* los enunciados verdaderos sobre la función $s(x)=(2x^2-6x)+(6x+5)$.

- ☐ **A.** $s(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba.
- ☐ **B.** $s(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo.
- ☐ **C.** $s(x)$ es una línea.
- ☐ **D.** $s(x)$ puede reescribirse utilizando dos términos.
- ☐ **E.** $s(x)$ puede reescribirse utilizando tres términos.

b Escribe la ecuación $d(x)=(3x^2-4x+7)-(-2x^2+2x-9)$ usando la menor cantidad posible de términos.

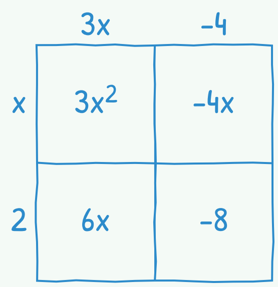
Resumen | Lección 2

Las expresiones cuadráticas pueden escribirse de *forma factorizada* o de *forma estándar*.

Puedes usar un modelo de área para ayudarte a reescribir una expresión cuadrática factorizada como una expresión equivalente en forma estándar.

Aquí se muestran dos ejemplos.

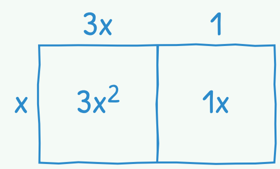
Forma factorizada: $(3x - 4)(x + 2)$



$3x^2 + 6x - 4x - 8$

Forma estándar: $3x^2 + 2x - 8$

Forma factorizada: $x(3x + 1)$

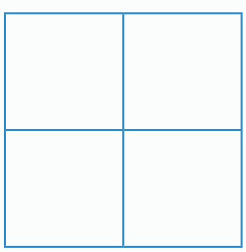


Forma estándar: $3x^2 + x$

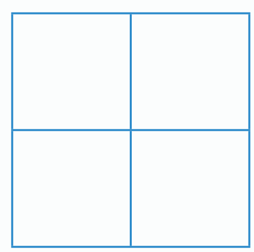
Prueba a hacer esto

Reescribe cada expresión en forma estándar. Usa los diagramas si te ayudan con tu razonamiento.

a $(2x - 5)(x + 3)$



b $(3x - 4)(2x + 1)$



Resumen | Lección 3

Puedes analizar la estructura de una expresión cuadrática escrita en *forma factorizada* para hacer predicciones sobre cómo será la expresión equivalente en *forma estándar*, $ax^2 + bx + c$.

Estas son dos estrategias para multiplicar una expresión en forma factorizada para reescribir expresiones cuadráticas en forma estándar.

Estrategia 1

$(2x - 5)(x + 3)$

	2x	-5
x	$2x^2$	-5x
3	6x	-15

Forma estándar: $2x^2 + x - 15$

a = 2 b = 1 c = -15

Estrategia 2

$(3x - 4)(3x + 4)$

$(3x - 4)(3x + 4)$

$9x^2 + 12x - 12x - 16$

Forma estándar: $9x^2 - 16$

a = 9 b = 0 c = -16

Estos dos ejemplos muestran algunos patrones:

- Si las constantes en forma factorizada tienen signos opuestos, el valor c en la forma estándar será negativo.
- Si los factores tienen los mismos *coeficientes*, pero constantes opuestas, entonces $b = 0$ en forma estándar.

Prueba a hacer esto

a Selecciona *todas* las expresiones que tengan un valor c negativo al escribirse en forma estándar.

- ☐ **A.** $(x - 2)(2x + 2)$
- ☐ **B.** $(x - 5)(x - 4)$
- ☐ **C.** $-2x(x + 3)$
- ☐ **D.** $(x + 8)(3x - 7)$

b Selecciona *todas* las expresiones que tengan un valor b de 0 al escribirse en forma estándar.

- ☐ **A.** $(3x - 2)(x + 2)$
- ☐ **B.** $(x - 7)(x + 7)$
- ☐ **C.** $(4x - 2)(2x + 4)$
- ☐ **D.** $(6x - 3)(6x + 3)$

Resumen | Lección 4

Un diagrama puede ser una herramienta útil para reescribir expresiones cuadráticas de la *forma estándar* a la *forma factorizada*. Por ejemplo: reescribe la expresión $3x^2 + 14x + 15$ en forma factorizada.

Trabajo

3x²	
	15

Explicación

Coloca el término ax^2 en la esquina superior izquierda del diagrama y el término c en la esquina inferior derecha.

	x	15
3x	3x²	45x
1	x	15

Prueba diferentes *factores* en el exterior del diagrama que se multiplican para obtener ax^2 y c hasta que el interior del diagrama coincida con la forma estándar.

Este intento no funcionó porque $x + 45x \neq 14x$. Puede que el primer intento no funcione, ¡no pasa nada! Prueba con diferentes factores o cambia la posición de los factores actuales.

	3x	5
x	3x²	5x
3	9x	15

Este intento funciona porque los términos lineales del diagrama se combinan para coincidir con bx en forma estándar: $5x + 9x = 14x$.

La forma factorizada es $(3x + 5)\ (x + 3)$.

Prueba a hacer esto

Reescribe cada expresión a la forma factorizada. Usa los diagramas si te ayudan con tu razonamiento.

a $x^2 - 81$

b $2x^2 + 3x - 27$

Resumen | Lección 5

Puedes usar la estructura de una expresión cuadrática escrita de *forma estándar* para predecir cómo será la *forma factorizada*. Estas son algunas de las estrategias.

- Intenta primero factorizar un factor común.
- Si la expresión en forma estándar solo tiene dos términos, escribe el término que falta con el coeficiente 0.
- Si el valor c es negativo, los signos de las constantes en forma factorizada serán diferentes.

Estos son algunos ejemplos.

$3x^2 - 9x - 30$

3 es un factor común.

$3(x^2 - 3x - 10)$

Entonces, factoriza $x^2 - 3x - 10$.

	x	-5
x	x^2	$-5x$
2	$2x$	-10

Cuando $a = 1$, las constantes en la forma factorizada se multiplican por c y se suman a b.

Forma factorizada:

$3(x - 5)(x + 2)$

$x^2 - 81$

Las expresiones con esta estructura se denominan *diferencia de cuadrados*. Puede ser útil reescribir la expresión con tres términos.

Factoriza $x^2 + 0x - 81$.

	x	9
x	x^2	$9x$
-9	$-9x$	-81

Forma factorizada:

$(x - 9)(x + 9)$

$2x^2 + 3x - 27$

No hay factor común alguno en esta expresión cuadrática.

Prueba pares de expresiones que se multipliquen por $2x^2$ y -27.

El valor c es negativo, por lo cual los signos de las constantes en forma factorizada serán diferentes.

	$2x$	9
x	$2x^2$	$9x$
-3	$-6x$	-27

Forma factorizada:

$(2x + 9)(x - 3)$

Prueba a hacer esto

Estas son dos expresiones escritas en la forma estándar.

Expresión A	Expresión B
$2x^2 + 22x + 60$	$3x^2 - 20x - 63$

a Factoriza ambas expresiones. Crea tus propios diagramas si te ayudan a pensar.

Expresión A: ____________ Expresión B: ____________

b ¿En qué se parecen los procesos que usaste para factorizar cada expresión? ¿En qué se diferencian?

Resumen | Lección 6

Una intersección con x es el punto de coordenadas donde la gráfica cruza el eje x y el valor de x en la intersección con x es un **cero**.

Para determinar los ceros o intersecciones con x, debes determinar los valores de x que hacen que la función sea igual a 0. Reescribir la función en la forma factorizada es un paso útil para determinar esos valores.

Estos son dos ejemplos de cómo determinar las intersecciones con x de funciones escritas en distintas formas.

Forma factorizada: $h(x) = (x - 1)(x + 6)$

Cuando $x = 1$, el factor $x - 1 = 0$, por lo tanto, $h(1) = 0$.

Cuando $x = \text{-}6$, el factor $x + 6 = 0$, por lo tanto, $h(\text{-}6) = 0$.

Los ceros son $x = 1$ y $x = \text{-}6$.

Las intersecciones con x son $(1, 0)$ y $(\text{-}6, 0)$.

Forma estándar: $g(x) = x^2 - 6x - 40$

Primero, puedo factorizar la función.

	x	$\text{-}10$
x	x^2	$\text{-}10x$
4	$4x$	$\text{-}40$

$g(x) = (x - 10)(x + 4)$

Cuando $x = 10$, el factor $x - 10 = 0$, por lo tanto, $g(10) = 0$.

Cuando $x = \text{-}4$, el factor $x + 4 = 0$, por lo tanto, $g(\text{-}4) = 0$.

Los ceros son $x = 10$ y $x = \text{-}4$.

Las intersecciones con x son $(10, 0)$ y $(\text{-}4, 0)$.

Prueba a hacer esto

Determina los ceros de cada función. Usa el diagrama si te ayuda a pensar.

a $h(x) = 3(x - 1)(x + 6)$

b $k(x) = 2x^2 - 14x + 24$

La **propiedad del producto cero** establece que si el producto de dos o más *factores* es 0, entonces al menos uno de los factores es 0. Puedes utilizar esta propiedad para determinar las intersecciones con x de una función o las *soluciones* de ecuaciones cuadráticas siguiendo los siguientes pasos.

- Iguala la ecuación cuadrática a 0.
- Factoriza la ecuación.
- Iguala cada factor a 0.
- Determina el valor de x.

Estos son dos ejemplos de resolución de ecuaciones cuadráticas.

$(5x - 3)(2x + 3) = 0$

Iguala cada factor a 0 y determina el valor de x.

$(5x - 3) = 0 \qquad (2x + 3) = 0$

$5x = 3 \qquad 2x = -3$

$x = \frac{3}{5}$ y $x = -\frac{3}{2}$

$2x^2 - x = 21$

Primero reescribe la ecuación para igualarla a 0.

$2x^2 - x - 21 = 0$

Luego factoriza la ecuación.

$(2x - 7)(x + 3) = 0$

Iguala cada factor a 0 y determina el valor de x.

$(2x - 7) = 0 \qquad (x + 3) = 0$

$2x = 7 \qquad x = -3$

$x = \frac{7}{2}$ y $x = -3$

Prueba a hacer esto

Resuelve cada ecuación. Muestra tu trabajo.

a $(10x - 5)(2x + 8) = 0$

b $40 = x^2 - 6x$

Resumen | Lección 8

Para determinar el número de soluciones de una ecuación cuadrática, puedes hacer distintos razonamientos o utilizar la estructura de la ecuación. Estos son algunos ejemplos:

Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones
$(x + \underline{\quad})^2 =$ un número negativo Ningún valor elevado al cuadrado dará como resultado un número negativo.	$(x + \underline{\quad})^2 = 0$ Solo un valor al cuadrado será igual a 0.	$(x + \underline{\quad})^2 =$ un número positivo Hay dos valores que cuando se elevan al cuadrado equivalen a un número positivo.
$(x + 10)^2 = -25$ $(x - 3)^2 + 1 = 0$ $x^2 + 4 = 0$	$(x + 4)^2 = 0$ $x^2 + 9 = 9$ $(x - 3)(x - 3) = 0$	$(x + 4)^2 = 1$ $x^2 - 12 = -3$ $(x - 3)(x - 3) = 1$

Prueba a hacer esto

Para cada ecuación, marca el número de soluciones.

Determina la(s) solución(es) de cualquier ecuación con una o más soluciones.

	Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones	Soluciones
$x^2 + 10 = 110$				
$(x - 8)^2 = 0$				
$x(x + 1) = 6$				
$(x - 3)^2 = -9$				

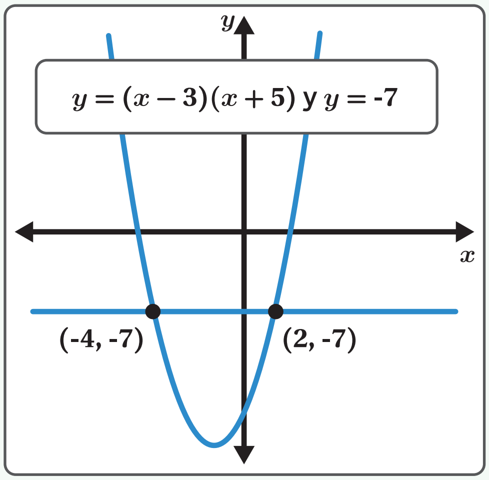
Resumen | Lección 9

Las gráficas pueden utilizarse para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática.

Estas son dos estrategias que utilizan gráficas para resolver $(x - 3)(x + 5) = -7$.

Estrategia 1

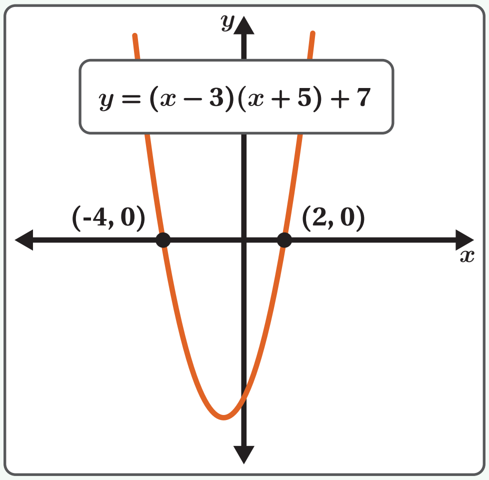
- Representa ambos lados de la ecuación como dos gráficas separadas.
- Determina las coordenadas de x donde se cruzan las gráficas.



Soluciones: $x = -4$ y $x = 2$

Estrategia 2

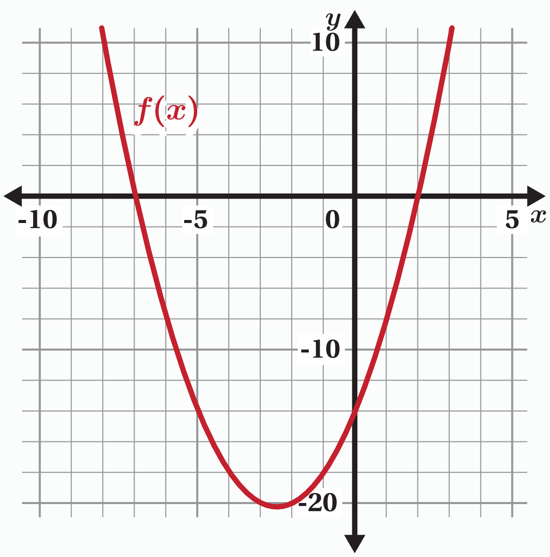
- Reescribe la ecuación para que sea igual a 0.
- Grafica la ecuación. Las soluciones serán en las intersecciones con el eje x.



Soluciones: $x = -4$ y $x = 2$

Prueba a hacer esto

Usa la gráfica de $f(x) = (x + 7)(x - 2)$ para determinar las soluciones para cada ecuación.



a $0 = (x + 7)(x - 2)$

b $(x + 7)(x - 2) = 10$

Resumen | Lección 10

Una estrategia para resolver ecuaciones de la forma $(x + \_\_\_)^2 = \_\_\_$ es sacar la *raíz cuadrada* ($\sqrt{}$) de ambos lados de la ecuación. Cuando se saca la raíz cuadrada de la ecuación mientras se resuelve, se puede utilizar el ± **(símbolo más/menos)** para representar que de este proceso resultan dos soluciones. Aquí se muestran dos ejemplos:

$(x - 1)^2 = 36$

$$\begin{aligned}
(x - 1)^2 &= 36 \\
\sqrt{(x - 1)^2} &= \sqrt{36} \\
x - 1 &= \pm\sqrt{36} \\
x - 1 &= \pm 6 \\
x &= 1 \pm 6 \\
x &= 7 \text{ y } x = -5
\end{aligned}$$

$2(x + 4)^2 = 12$

$$\begin{aligned}
2(x + 4)^2 &= 12 \\
(x + 4)^2 &= 6 \\
\sqrt{(x + 4)^2} &= \sqrt{6} \\
x + 4 &= \pm\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Soluciones exactas: $x = -4 \pm \sqrt{6}$

Soluciones aproximadas: $x \approx -1.55$ y $x \approx -6.45$

Si las soluciones de una ecuación cuadrática son *números irracionales*, puedes dejar la raíz cuadrada en la expresión para representar una solución exacta o convertir la raíz cuadrada en un número decimal para expresar soluciones aproximadas.

Prueba a hacer esto

Determina la o las soluciones de cada ecuación. Muestra tu trabajo.

a $(x + 3)^2 = 7$

b $10(x - 5)^2 = 10$

c $(x + 4)^2 - 8 = 5$

Resumen | Lección 11

Una expresión cuadrática es un **cuadrado perfecto** si se puede representar como algo multiplicado por sí mismo, como ($x +$ ______ $)^2$.

Puedes determinar el valor de la constante que falta sumar para formar un cuadrado perfecto, dividiendo a la mitad el coeficiente lineal y elevando ese número al cuadrado.

Estos son dos ejemplos de cómo rellenar los espacios en blanco para que cada expresión sea un cuadrado perfecto.

$x^2 + 14x +$ ______

En las expresiones de cuadrado perfecto, el valor b, 14, siempre es el doble de la constante en la forma factorizada $(x + 7)^2$.

Por lo tanto, el número que falta debe ser la constante 7 al cuadrado, que es 49.

$x^2 + 14x + 49$

	x	7
x	x^2	$7x$
7	$7x$	49

$x^2 -$ ______ $+ 81$

El valor c, 81, es un cuadrado perfecto, por lo que la expresión en forma factorizada debe ser $(x - 9)^2$.

Reescribe la forma factorizada a la forma estándar, utilizando un modelo de área o la propiedad distributiva. El número que falta debe ser -$18x$.

$x^2 - 18x + 81$

	x	-9
x	x^2	-9x
-9	-9x	81

Prueba a hacer esto

Relaciona cada expresión con el valor que falta para que la expresión sea un cuadrado perfecto.

Expresión	**Valor que falta**
a. $x^2 +$ ______ $x + 9$	_____ 16
b. $x^2 + 8x +$ ______	_____ -16
c. $x^2 - 12x +$ ______	_____ 36
d. $x^2 +$ ______ $x + 64$	_____ -6

Resumen | Lección 12

Puedes resolver ecuaciones cuadráticas graficando, factorizando o **completando el cuadrado**, que es el proceso de reescribir una expresión o ecuación cuadrática para incluir un cuadrado perfecto. Puedes analizar la estructura de la ecuación para ayudarte a decidir qué estrategia utilizar.

Aquí tienes un ejemplo: $x^2 + 10x = 2$. Resolver mediante gráficas no producirá soluciones exactas y no es posible factorizar esta ecuación, por lo tanto, podemos resolverla completando el cuadrado:

Trabajo:	Explicación
$x^2 + 10x + 25 = 2 + 25$	$x^2 + 10x + 25$ es un cuadrado perfecto, por lo tanto, añade la constante 25 a ambos lados de la ecuación.
$(x + 5)^2 = 27$	Reescribe el cuadrado perfecto $x^2 + 10x + 25$ en la forma factorizada.
$x + 5 = \pm\sqrt{27}$	Indica la raíz cuadrada e incluye ambas posibilidades escribiendo $\pm$.
$x = -5 \pm \sqrt{27}$	Determina el valor de x.

Prueba a hacer esto

Determina las soluciones exactas de cada ecuación. Muestra tu trabajo.

a. $x^2 - 6x = 14$

b. $x^2 + 16x - 9 = 0$

Resumen | Lección 13

Las distintas formas de una función cuadrática revelan diferentes características clave de su gráfica.

- La forma factorizada revela las intersecciones con el eje x o los ceros.
- La forma estándar revela las intersecciones con el eje y.
- *La forma de vértice* revela el valor máximo o mínimo de la función cuadrática.

Puedes completar el cuadrado para reescribir una función cuadrática en la forma estándar en forma de vértice.

Estas son dos estrategias diferentes para reescribir $f(x) = x^2 - 6x + 17$ en forma de vértice.

Estrategia 1

$$f(x) = x^2 - 6x + 17$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 + 8$$

Estrategia 2

$$f(x) = x^2 - 6x + 17$$
$$(x^2 - 6x + 9) + 8$$
$$(x - 3)^2 + 8$$

El vértice de $f(x)$ es $(3, 8)$ y la gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba, por lo tanto, 8 será el valor mínimo.

Prueba a hacer esto

Considera la función $f(x) = x^2 + 20x - 25$.

a Reescribe la función en forma de vértice. Muestra tu trabajo.

b Identifica el vértice de $f(x)$.

Resumen | Lección 14

Puedes usar la **fórmula cuadrática** para resolver ecuaciones cuadráticas escritas en la forma estándar. La fórmula cuadrática establece que las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

La fórmula cuadrática se obtiene completando el cuadrado.

Este es un ejemplo de cómo completar el cuadrado y utilizar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 8x + 13 = 0$. Aunque las respuestas parezcan diferentes, son equivalentes.

Completar el cuadrado

Resuelve $x^2 + 8x + 13 = 0$

$$x^2 + 8x = -13$$
$$x^2 + 8x + 16 = -13 + 16$$
$$x^2 + 8x + 16 = 3$$
$$(x + 4)^2 = 3$$
$$x + 4 = \pm\sqrt{3}$$
$$x = -4 \pm \sqrt{3}$$

Fórmula cuadrática

Resuelve $x^2 + 8x + 13 = 0$

$a = 1,\ b = 8,\ c = 13$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{12}}{2}$$

Prueba a hacer esto

En cada ecuación cuadrática, identifica a, b y c. Introduce esos valores en la fórmula cuadrática.

	a	b	c	Fórmula cuadrática
$x^2 + 6x + 3 = 0$				$x = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad\quad}}{\quad}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$				$x = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad\quad}}{\quad}$
$-2.5x^2 + 6x - 8 = 0$				$x = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad\quad}}{\quad}$

Resumen | Lección 15

Puedes resolver *cualquier* ecuación cuadrática escrita en la forma estándar, $ax^2 + bx + c = 0$, usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este es un ejemplo del uso de la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2 - 9x + 6 = 0$.

Trabajo	Explicación
$a = 2$, $b = -9$, $c = 6$	Identifica los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática en la forma estándar.
$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$	Sustituye los valores de a, b y c en la fórmula cuadrática.
$x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$	Usa el orden de las operaciones para simplificar la expresión.
$x = \frac{9 + \sqrt{33}}{4}$ y $x = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}$	Escribe las soluciones.

Prueba a hacer esto

Usa la fórmula cuadrática para determinar las soluciones de cada ecuación.

a $x^2 + 6x + 3 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)\,(3)}}{2(1)}$$

b $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad\quad}}{\quad\quad}$$

Puedes utilizar funciones cuadráticas para representar las trayectorias de objetos que se lanzan, como un cohete de aire. Puedes utilizar funciones para responder a preguntas sobre el lanzamiento, como las siguientes:

1. Sustituye la información dada en la ecuación.
2. Determina el valor de la variable que falta utilizando cualquier estrategia (por ejemplo, la fórmula cuadrática o cualquier otra estrategia disponible).
3. Interpreta si la solución o las soluciones tienen sentido en esta situación.

La función $h(t) = -2.5t^2 + 6t + 8$ representa la altura en metros del cohete de aire t segundos después de su lanzamiento.

¿Cuándo caerá al suelo el cohete?	¿Cuándo estará el cohete a una altura de 10 metros?	¿Alcanzará el cohete una altura de 15 metros?
Información dada: $h(t) = 0$ $0 = -2.5t^2 + 6t + 8$ Usando la fórmula cuadrática, obtengo las siguientes soluciones: $t = -0.954$ y $t = 3.354$ Retroceder en el tiempo no tiene sentido en esta situación, por lo tanto, la única respuesta es 3.354 segundos.	Información dada: $h(t) = 10$ $10 = -2.5t^2 + 6t + 8$ $0 = -2.5t^2 + 6t - 2$ Usando la fórmula cuadrática obtengo las siguientes soluciones: $t = 0.4$ y $t = 2$ El cohete estará a una altura de 10 metros a los 4 segundos y a los 2 segundos.	Información dada: $h(t) = 15$ $15 = -2.5t^2 + 6t + 8$ $0 = -2.5t^2 + 6t - 7$ Usando la fórmula cuadrática no obtengo solución: $t = \frac{-6 \pm \sqrt{-34}}{-5}$ Esto significa que el cohete nunca alcanzará una altura de 15 pies.

Prueba a hacer esto

La función $h(t) = -2t^2 + 8t - 6$ representa la altura de un cohete de aire, en metros, t segundos después del lanzamiento.

a Escribe una ecuación que pueda determinar cuándo volverá el cohete a su altura original de -6 metros.

b ¿Cuánto tardará el cohete en volver a su altura original?

Los *números racionales* son números que se pueden escribir como una fracción con numerador y denominador enteros. *Los números irracionales* son números que no son racionales, lo que significa que no se pueden escribir como una fracción con numerador y denominador enteros.

Estas son algunas propiedades de las sumas y productos de números racionales e irracionales.

	Sumas		Productos	
Propiedades	La suma de dos números racionales es siempre racional.	La suma de un número racional y un número irracional es siempre irracional.	El producto de dos números racionales es siempre racional.	El producto de un número racional distinto de cero y un número irracional es siempre irracional.
Ejemplos	$\frac{1}{2}+3$ $8+\sqrt{25}$	$\sqrt{7}+2$ $\frac{1}{2}+\sqrt{44}$	$\frac{2}{3}\cdot 0.\overline{1}$ $\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{11}\right)$	$\pi\cdot\frac{1}{3}$ $2\cdot\sqrt{5}$

Prueba a hacer esto

Selecciona *todas* las expresiones que sean racionales.

- ☐ **A.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$
- ☐ **B.** $\frac{2}{5}\cdot\sqrt{2}$
- ☐ **C.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
- ☐ **D.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{9}$
- ☐ **E.** $\sqrt{5}+\sqrt{7}$
- ☐ **F.** $\sqrt{3}-\sqrt{3}$

Para empezar a resolver un sistema de ecuaciones lineales y cuadráticas, puedes utilizar la *sustitución* o la *eliminación*. Después de formar una nueva ecuación cuadrática con una sola variable, elige cualquier estrategia de resolución de ecuaciones cuadráticas para determinar los valores de x, como por ejemplo:

- Factorizar y utilizar la propiedad del producto cero.
- Sacar la raíz cuadrada.
- Completar el cuadrado
- Utilizar la fórmula cuadrática.

Este es un ejemplo del uso de sustitución, factorización y la propiedad del producto cero para resolver este *sistema de ecuaciones*:

$$y = 2x - 7$$

$$y = x^2 - 5x + 3$$

$y = \boxed{2x - 7}$ $\quad y = x^2 - 5x + 3$

$2x - 7 = x^2 - 5x + 3$

$0 = x^2 - 7x + 10$

$0 = (x - 5)(x - 2)$

$\boxed{x = 5}$ $\quad \boxed{x = 2}$

$y = 2(5) - 7$ $\quad y = 2(2) - 7$

$\boxed{y = 3}$ $\quad \boxed{y = -3}$

Puntos de intersección:

$\boxed{(5, 3)}$ $\quad \boxed{(2, -3)}$

Prueba a hacer esto

Resuelve cada sistema de ecuaciones. Muestra tu trabajo.

a $y = 9x^2 - 7$
$y = \text{-}18x$

b $y = x^2 - 3x$
$y = 2x - 6$

Lección 1

a A. $s(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba.

D. $s(x)$ puede reescribirse utilizando dos términos.

E. $s(x)$ puede reescribirse utilizando tres términos.

b $d(x) = 5x^2 - 6x + 16$

Lección 2

a $2x^2 + x - 15$

b $6x^2 - 5x - 4$

Lección 3

a A. $(x - 2)(2x + 2)$

D. $(x + 8)(3x - 7)$

b B. $(x - 7)(x + 7)$

D. $(6x - 3)(6x + 3)$

Lección 4

a $(x - 9)(x + 9)$

b $(2x + 9)(x - 3)$

Lección 5

a Expresión A: $2(x + 5)(x + 6)$

Expresión B: $(3x + 7)(x - 9)$

b *Las respuestas pueden variar.*

- En la expresión A, pude factorizar un 2 de cada término, dejando la expresión $2(x^2 + 11x + 30)$. Sin embargo, en la expresión B no hay un número que se pueda factorizar de cada término.
- Al factorizar la expresión B, tuve que considerar los factores de 3 y -63. Después de factorizar el 2 de la expresión A, solo tuve que centrarme en los factores de 30.
- Después de enumerar los factores de ambas expresiones, tuve que hallar la combinación correcta de factores que al sumarse, dieran como resultado el valor b en ambas expresiones.

Lección 6

a $x = 1$ y $x =$ -6

b $x = 4$ y $x = 3$

Lección 7

a $x = 0.5$ y $x =$ -4. *Los trabajos pueden variar.*

$(10x - 5)(2x + 8) = 0$

$$\begin{array}{rcl} 10x - 5 &=& 0 \\ +5 && +5 \\ \hline 10x &=& 5 \\ x &=& \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + 8 &=& 0 \\ -8 && -8 \\ \hline 2x &=& -8 \\ x &=& -4 \end{array}$$

b $x = 10$ y $x =$ -4. *Los trabajos pueden variar.*

$40 = x^2 - 6x$

$x^2 - 6x - 40 = 0$

$(x - 10)(x + 4) = 0$

$$\begin{array}{rcl} x - 10 &=& 0 \\ +10 && +10 \\ \hline x &=& 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 4 &=& 0 \\ -4 && -4 \\ \hline x &=& -4 \end{array}$$

Lección 8

	Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones	Soluciones
$x^2 + 10 = 110$			✓	$x = 10$ $x =$ -10
$(x - 8)^2 = 0$		✓		$x = 8$
$x(x + 1) = 6$			✓	$x =$ -3 $x = 2$
$(x - 3)^2 =$ -9	✓			

Lección 9

a $x =$ -7 y $x = 2$

b $x =$ -8 y $x = 3$

Lección 10

a $x = -3 \pm \sqrt{7}$. *Los trabajos pueden variar.*

$$(x+3)^2 = 7$$
$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{7}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{7}$$
$$-3 \quad -3$$
$$x = -3 \pm \sqrt{7}$$

b $x = 5 \pm 1$ o $x = 6$ y $x = 4$. *Los trabajos pueden variar.*

$$10(x-5)^2 = 10$$
$$(x-5)^2 = 1$$
$$\sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{1}$$
$$x - 5 = \pm 1$$
$$+5 \quad +5$$
$$x = 5 \pm 1$$

c $x = -4 \pm \sqrt{13}$. *Los trabajos pueden variar.*

$$(x+4)^2 - 8 = 5$$
$$+8 + 8$$
$$(x+4)^2 = 13$$
$$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{13}$$
$$x + 4 = \pm\sqrt{13}$$
$$-4 \quad -4$$
$$x = -4 \pm \sqrt{13}$$

Lección 11

__b__ 16

__d__ -16

__c__ 36

__a__ -6

Lección 12

a $x = 3 \pm \sqrt{22}$. *Los trabajos pueden variar.*

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= 14 \\ x^2 - 6x + 9 &= 14 + 9 \\ (x-3)^2 &= 22 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{22} \\ x &= 3 \pm \sqrt{22} \end{aligned}$$

b $x = \text{-}8 \pm \sqrt{73}$. *Los trabajos pueden variar.*

$$\begin{aligned} x^2 + 16x - 9 &= 0 \\ x^2 + 16x &= 9 \\ x^2 + 16x + 64 &= 9 + 64 \\ (x+8)^2 &= 73 \\ x + 8 &= \pm\sqrt{73} \\ x &= \text{-}8 \pm \sqrt{73} \end{aligned}$$

Lección 13

a $f(x) = (x+10)^2 - 125$. *Los trabajos pueden variar.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 20x - 25 \\ f(x) &= (x^2 + 20x + 100) - 100 - 25 \\ f(x) &= (x+10)^2 - 100 - 25 \\ f(x) &= (x+10)^2 - 125 \end{aligned}$$

b (-10, -125)

Lección 14

	a	b	c	Fórmula cuadrática
$x^2 + 6x + 3 = 0$	1	6	3	$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$	3	-5	2	$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$
$-2.5x^2 + 6x - 8 = 0$	-2.5	6	-8	$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-2.5)(-8)}}{2(-2.5)}$

Lección 15

a. $x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2}$ (o equivalente)

b. $x = \frac{2}{3}$ y $x = 1$

Lección 16

a. $-6 = -2t^2 + 8t - 6$

b. 4 segundos

Lección 17

A. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

C. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

D. $\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{9}$

F. $\sqrt{3} - \sqrt{3}$

Lección 18

a $\left(\frac{1}{3}, -6\right)$ y $\left(-\frac{7}{3}, 42\right)$. *Los trabajos pueden variar.*

$y = 9x^2 - 7$

$y = -18x$

$-18x = 9x^2 - 7$

$0 = 9x^2 + 18x - 7$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(9)(-7)}}{2(9)} = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{18} = \frac{-18 \pm 24}{18} = \frac{-3 \pm 4}{3}$$

$x = \frac{-7}{3}$ y $x = \frac{1}{3}$

$-18\left(\frac{-7}{3}\right) = 42$ y $-18\left(\frac{1}{3}\right) = -6$

b $(2, -2)$ y $(3, 0)$. *Los trabajos pueden variar.*

$y = x^2 - 3x$

$y = 2x - 6$

$2x - 6 = x^2 - 3x$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2$ y $x = 3$

$2(2) - 6 = -2$ y $2(3) - 6 = 0$

Algebra 1 Unit 8 Glossary/Álgebra 1 Unidad 8 Glosario

English

C

completing the square The process of rewriting a quadratic expression or equation to include a perfect square.

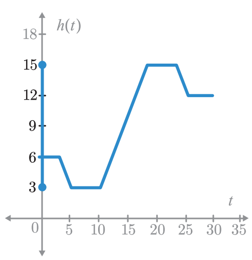
$$f(x) = x^2 - 6x + 17$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 + 8$$

D

difference of squares An expression that can be written as two perfect squares subtracted from one another. It has the structure $r^2 - s^2$ in standard form and $(r - s)(r + s)$ in factored form.

These expressions are differences of squares: $x^2 - 25$, $9x^2 - 100$, and $16x^2 - 1$.

domain The set of all possible input values for a function or relation. The domain can be described in words or as an inequality.



The domain of this graph can be described as:
All numbers from 0 to 30 or $0 \le t \le 30$.

E

elimination A method of solving systems of equations where you add or subtract the equations to produce a new equation with fewer variables.

$$\begin{aligned} 9x + y &= 2 \\ -(3x + y &= 10) \\ \hline 6x + 0 &= -8 \end{aligned}$$

In the example, subtraction is used to eliminate y and create an equation that can be solved for x.

Español

C

completación del cuadrado El proceso de reescribir una expresión o ecuación cuadrática para incluir un cuadrado perfecto.

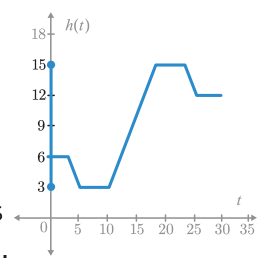
$$f(x) = x^2 - 6x + 17$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 - 9 + 17$$
$$(x - 3)^2 + 8$$

D

diferencia de cuadrados Una expresión que puede escribirse como dos cuadrados perfectos restados entre sí. Tiene la estructura $r^2 - s^2$ en forma estándar y $(r - s)(r + s)$ en forma factorizada.

Estas expresiones son diferencias de cuadrados: $x^2 - 25$, $9x^2 - 100$ y $16x^2 - 1$.

dominio El conjunto de todos los valores de entrada posibles de una función o relación. El dominio puede describirse con palabras o como una desigualdad.



El dominio de esta gráfica puede describirse de la siguiente manera:
Todos los números del 0 al 30 o $0 \le t \le 30$.

E

eliminación Un método para resolver sistemas de ecuaciones en el que se suman o restan las ecuaciones para producir una nueva ecuación con menos variables.

$$\begin{aligned} 9x + y &= 2 \\ -(3x + y &= 10) \\ \hline 6x + 0 &= -8 \end{aligned}$$

En el ejemplo, se usa la resta para eliminar y y producir una ecuación que puede resolverse para determinar el valor de x.

English | Español

F

factor (of a number or expression)
A number or expression multiplied with other numbers or expressions to make a product.

For example, 1, 2, 4, and 8 are all factors of the number 8 because $1 \bullet 8 = 8$ and $2 \bullet 4 = 8$. Also, $(x + 3)$ and $(x - 5)$ are factors of $x^2 - 2x - 15$ because $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

factor (de un número o una expresión)
Un número o una expresión que se multiplica por otros números o expresiones para dar como resultado un producto.

Por ejemplo, 1, 2, 4 y 8 son factores del número 8 porque $1 \bullet 8 = 8$ y $2 \bullet 4 = 8$. Además, $(x + 3)$ y $(x - 5)$ son factores de $x^2 - 2x - 15$ porque $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

factored form One of three common forms of a quadratic equation. A quadratic equation in factored form looks like: $f(x) = a(x - m)(x - n)$.

These equations are in factored form:
$g(x) = x(x + 10)$
$2(x - 1)(x + 3) = y$
$y = (5x + 2)(3x - 1)$

forma factorizada Una de las tres formas comunes de una ecuación cuadrática. Una ecuación cuadrática en forma factorizada tiene el siguiente orden: $f(x) = a(x - m)(x - n)$.

Estas ecuaciones están en forma factorizada:
$g(x) = x(x + 10)$
$2(x - 1)(x + 3) = y$
$y = (5x + 2)(3x - 1)$

I

irrational number A number that cannot be written as a fraction with integers as the numerator and denominator.

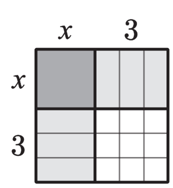
2 is a rational number because it can be written as $\frac{2}{1}$, whereas $\sqrt{3}$ is irrational because it cannot be written as a fraction made up of two integers.

número irracional Números que no pueden escribirse como una fracción con números enteros en el numerador y el denominador.

2 es un número racional porque se puede escribir como $\frac{2}{1}$, mientras que $\sqrt{3}$ es irracional porque no se puede escribir como una fracción de dos números enteros.

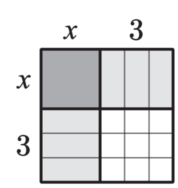
P

perfect square An expression that can be written as something multiplied by itself.



These expressions are perfect squares: 3^2, 9, $(x + 3)^2$, and $x^2 + 6x + 9$.

cuadrado perfecto Una expresión que puede escribirse como algo multiplicado por sí mismo.



Estas expresiones son cuadrados perfectos: 3^2, 9, $(x + 3)^2$ y $x^2 + 6x + 9$.

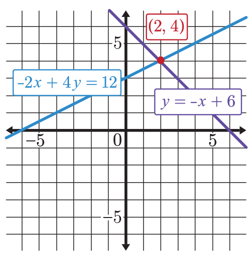
English

± (plus/minus symbol) A symbol used to represent both the positive and negative values of a number. It also can be used to represent two expressions.

± 9 represents -9 and +9.
2 ± 3 represents $2 - 3$ and $2 + 3$.

point of intersection A point where two lines or curves meet.

For example, $(2, 4)$ is the point of intersection for the lines $-2x + 4y = 12$ and $y = -x + 6$.



polynomial An expression that can be written as the sum of terms, each of which is a number multiplied by a power of a variable. The word polynomial is used to refer both to the expression and to the function it defines. Linear and quadratic functions are both examples of polynomial functions.

$2x - 7$ and $3x^2 - x + 4$ are polynomial expressions.
$f(x) = 2x - 7$ and $g(x) = 3x^2 - x + 4$ are polynomial functions.

Q

quadratic formula A formula that can be used to determine the solutions of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

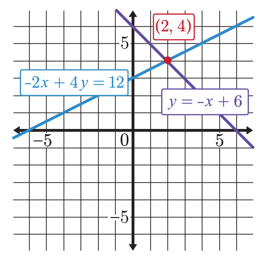
Español

± (signo más menos) Un símbolo que se usa para representar los valores positivos y negativos de un número. También puede usarse para representar dos expresiones.

± 9 representa -9 and +9.
2 ± 3 representa $2 - 3$ y $2 + 3$.

punto de intersección Un punto donde se cruzan dos rectas o curvas.

Por ejemplo, $(2, 4)$ es el punto de intersección de las rectas $y = -x + 6$ y $-2x + 4y = 12$.



polinomio Una expresión que puede escribirse como la suma de términos, cada uno de los cuales es un número multiplicado por una potencia de una variable. La palabra polinomio se emplea para referirse tanto a la expresión como a la función que define. Las funciones lineales y cuadráticas son ejemplos de funciones polinómicas.

$2x - 7$ y $3x^2 - x + 4$ son expresiones polinómicas.
$f(x) = 2x - 7$ y $g(x) = 3x^2 - x + 4$ son funciones polinómicas.

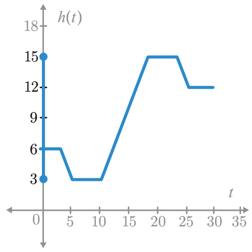
fórmula cuadrática Una fórmula que puede usarse para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

English	Español

R

range (of a function) The set of all possible output values for a function or relation. The range can be described in words or as an inequality.

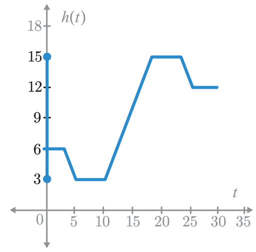


The range of this graph can be described as:
All numbers from 3 to 15 or $3 \leq h(t) \leq 15$.

rational number A number that can be written as a fraction with a non-zero denominator.

$\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{4}$, 0, 0.2, -5, and $\sqrt{9}$ are rational numbers.

rango (de una función) El conjunto de todos los posibles valores de salida de una función o relación. El rango puede describirse con palabras o como una desigualdad.



El rango de esta gráfica puede describirse de la siguiente manera:
Todos los números del 3 al 15 o $3 \leq h(t) \leq 15$.

número racional Números que pueden escribirse como una fracción con números enteros en el numerador y el denominador.

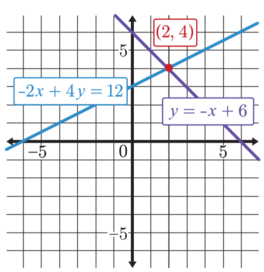
$\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{4}$, 0, 0.2, -5 y $\sqrt{9}$ son números racionales.

S

solution A value or set of values that makes an equation or inequality true.

For example:
$x = 2$ is a solution to the equation $3x + 4 = 10$.
$x > 2$ is the solution to the inequality $3x + 4 > 10$.
The ordered pair $(1, 2)$ is a solution to the equation $3x + 4y = 11$.

solution to a system of equations A solution to a system of equations is a set of values that makes all equations in that system true. When the equations are graphed, the solution to the system is the intersection point.

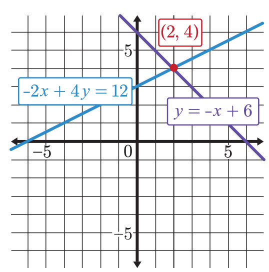


For the system $y = -x + 6$ and $-2x + 4y = 12$, $(2, 4)$ is the solution to this system of equations and the intersection point on the graph.

solución Un valor o conjunto de valores que hacen que una ecuación o una desigualdad sean verdaderas.

Por ejemplo:
$x = 2$ es una solución de la ecuación $3x + 4 = 10$.
$x > 2$ es la solución de la desigualdad $3x + 4 > 10$.
El par ordenado $(1, 2)$ es una solución de la ecuación $3x + 4y = 11$.

solución de un sistema de ecuaciones Una solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores que hace que todas las ecuaciones de ese sistema sean verdaderas. Al graficar las ecuaciones, la solución del sistema es el punto de intersección.



Por ejemplo, en el sistema de ecuaciones $y = -x + 6$ y $-2x + 4y = 12$, la solución y el punto de intersección de la gráfica es $(2, 4)$.

Algebra 1 Unit 8 Glossary/Álgebra 1 Unidad 8 Glosario

English

square root The square root of a number n (written as $\sqrt{n}$) is the positive number that can be squared to get n. The square root is also the side length of a square with an area of n.

The square root of 16 ($\sqrt{16}$) is 4 because 4^2 is 16. The $\sqrt{16}$ is also the side length of a square that has an area of 16.

standard form (of a quadratic equation) One of three common forms of a quadratic equation. A quadratic equation in standard form looks like: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

These equations are in standard form:
$y = 2x^2 + 5x + 3$
$h(x) = x^2 + 3x$
$4x^2 - 7 = f(x)$

substitution A method of solving systems of equations where a variable is replaced with an equivalent expression in order to produce a new equation with fewer variables.

$y = -4x + 6$ $\quad y = 3x - 15$
$-4x + 6 = 3x - 15$
$-7x = -21$
$\boxed{x = 3}$
$y = 3(3) - 15$
$\boxed{y = -6}$

For example, we can substitute $-4x + 6$ in for y in $y = 3x - 15$ because they are equivalent.

system of equations Two or more equations that represent the constraints on a shared set of variables form a system of equations.

These equations make a system:
$3b + c = -2$
$b - 5c = 12$

Español

raíz cuadrada La raíz cuadrada de un número n (se escribe $\sqrt{n}$) es el número positivo que puede elevarse al cuadrado para obtener n. La raíz cuadrada también es la longitud de lado de un cuadrado con un área de n.

La raíz cuadrada de 16 ($\sqrt{16}$) es 4 porque 4^2 es 16. La $\sqrt{16}$ también es la longitud de lado de un cuadrado que tiene un área de 16.

forma estándar (de una ecuación cuadrática) Una de las tres formas comunes de una ecuación cuadrática. Una ecuación cuadrática en forma estándar tiene el siguiente orden: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Estas ecuaciones están en forma estándar:
$y = 2x^2 + 5x + 3$
$h(x) = x^2 + 3x$
$4x^2 - 7 = f(x)$

sustitución Un método para resolver sistemas de ecuaciones donde una variable se reemplaza con una expresión equivalente para producir una nueva ecuación con menos variables.

$y = -4x + 6$ $\quad y = 3x - 15$
$-4x + 6 = 3x - 15$
$-7x = -21$
$\boxed{x = 3}$
$y = 3(3) - 15$
$\boxed{y = -6}$

Por ejemplo, podemos introducir $-4x + 6$ en lugar de y en $y = 3x - 15$ porque son equivalentes.

sistema de ecuaciones Dos o más ecuaciones que representan las restricciones de un conjunto compartido de variables forman un sistema de ecuaciones.

Estas ecuaciones forman un sistema:
$3b + c = -2$
$b - 5c = 12$

English

V

vertex form One of three common forms of a quadratic equation. A quadratic equation in vertex form looks like: $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

These equations are in vertex form:
$(x - 3)^2 + 10 = g(x)$
$y = 2(x + 8)^2 - 1$
$f(x) = \text{-}(x - 6)^2 + 15$

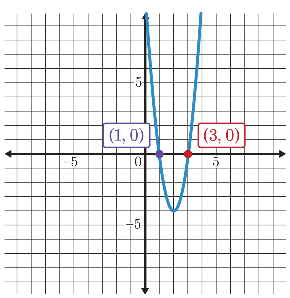
Z

zero-product property A property which states that if the product of two or more factors is 0, then at least one of the factors is 0. This property can be used to help solve equations.

If $(2x - 3)(x + 1) = 0$, then either $2x - 3 = 0$ or $x + 1 = 0$.

zeros The x-values that make a function equal zero, or $f(x) = 0$.

The zeros of $f(x) = 4(x - 1)(x - 3)$ are 1 and 3.



Español

V

forma de vértice Una de las tres formas comunes de una ecuación cuadrática. Una ecuación cuadrática en forma de vértice tiene el siguiente orden: $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Estas ecuaciones están en forma de vértice:
$(x - 3)^2 + 10 = g(x)$
$y = 2(x + 8)^2 - 1$
$f(x) = \text{-}(x - 6)^2 + 15$

Z

propiedad del producto cero Una propiedad que establece que si el producto de dos o más factores es 0, entonces al menos uno de los factores es 0. Esta propiedad puede usarse como ayuda para resolver ecuaciones.

Si $(2x - 3)(x + 1) = 0$, entonces $2x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$.

ceros Los valores x que hacen que una función sea igual a cero, o $f(x) = 0$.

Los ceros de $f(x) = 4(x - 1)(x - 3)$ son 1 y 3.